

1 Tenzoranalízisbeli **jelölések**: vektorok, mátrixok, tenzorok

(a) *Mátrixok* (xyz) koordináta rendszerben:

- oszlop mátrix: pl. vektor mátrixa $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$ esetén $[\vec{v}] = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$,

oszlop mátrix transzponáltja: $[\vec{v}]^T = [v_x \ v_y \ v_z]$

- négyzetes (3×3)-as mátrixok:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow [\underline{\underline{A}}]^T = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{zy} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{bmatrix}$$

- szimmetrikus mátrix: $[\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{A}}]^T$, jele: $[\underline{\underline{A}}]_{sz}$
- aszimmetrikus mátrix: $[\underline{\underline{A}}] = -[\underline{\underline{A}}]^T$, jele: $[\underline{\underline{A}}]_{asz}$
- mátrixok additív felbontása:

$$[\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{A}}]_{sz} + [\underline{\underline{A}}]_{asz} = \frac{1}{2}([\underline{\underline{A}}] + [\underline{\underline{A}}]^T) + \frac{1}{2}([\underline{\underline{A}}] - [\underline{\underline{A}}]^T)$$

- mátrix szorzása vektorral

$$[\underline{\underline{A}}][\vec{v}] = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx}v_x + a_{xy}v_y + a_{xz}v_z \\ a_{yx}v_x + a_{yy}v_y + a_{yz}v_z \\ a_{zx}v_x + a_{zy}v_y + a_{zz}v_z \end{bmatrix} \rightarrow [\underline{\underline{A}}][\vec{e}_x] = \begin{bmatrix} a_{xx} \\ a_{yx} \\ a_{zx} \end{bmatrix}$$

(b) *Vektorok* általános (diadikus) szorzata

Jele: $\vec{a} \circ \vec{b} = \underline{\underline{C}}$, érvényes a $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$ összefüggés.

Kiszámítása (xyz) KR-ben:

$$[\underline{\underline{C}}] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} [b_x \ b_y \ b_z] = [\vec{a}][\vec{b}]^T = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}$$

(c) *Tenzorok*

Def.: homogén, lineáris, vektor-vektor függvény: $\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}}\vec{v}$,

Megadása (xyz) KR-ben:

- vektorosan

$$\vec{w} = \vec{t}_x v_x + \vec{t}_y v_y + \vec{t}_z v_z$$

- mátrixosan

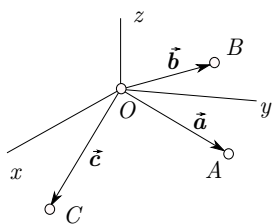
$$[\vec{w}] = [\underline{\underline{T}}][\vec{v}] \rightarrow \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}; \quad [\underline{\underline{T}}] = [\vec{t}_x \ \vec{t}_y \ \vec{t}_z]$$

- diadikusan

$$\vec{w} = \underline{\underline{T}}\vec{v} \rightarrow \underline{\underline{T}} = \vec{t}_x \circ \vec{e}_x + \vec{t}_y \circ \vec{e}_y + \vec{t}_z \circ \vec{e}_z; \quad \underline{\underline{T}}\vec{e}_x = \vec{t}_x \dots$$

2 Adottak az alábbi vektorok:

$$\vec{a} = (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) [\text{m}]; \vec{b} = (-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) [\text{m}]; \vec{c} = (-2\vec{e}_y - 5\vec{e}_z) [\text{m}]$$



(a) Határozza meg az alábbi műveletek eredményét!

i. $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a} \times \vec{b}$; $\underline{\underline{A}} = \vec{a} \circ \vec{b}$; $\underline{\underline{B}} = \vec{b} \circ \vec{a}$

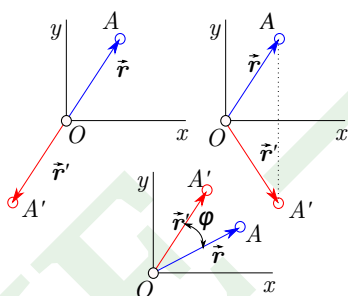
ii. $\underline{\underline{F}} = \vec{a} \circ \vec{e}_x$; $\underline{\underline{G}} = \vec{b} \circ \vec{e}_y$; $\underline{\underline{H}} = \vec{c} \circ \vec{e}_z$; $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{H}}$

iii. $\vec{d} = (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$; $\vec{f} = (\vec{b} \circ \vec{a}) \cdot \vec{c}$; $\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$; $\vec{c} \cdot (\vec{b} \circ \vec{a})$

(b) Bontsa fel az $\underline{\underline{A}}$ mátrixát $\underline{\underline{A}}_{sz}$ szimmetrikus és $\underline{\underline{A}}_{asz}$ aszimmetrikus részekre!

Megoldás: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 [\text{m}^2]$; $\vec{a} \times \vec{b} = (-5\vec{e}_x + 7\vec{e}_y + 22\vec{e}_z) [\text{m}^2]$; $[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} [\text{m}^2]$; $[\underline{\underline{B}}] = \begin{bmatrix} -12 & -18 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \\ -4 & -6 & 1 \end{bmatrix} [\text{m}^2]$;
 $[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{m}]$; $[\underline{\underline{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} [\text{m}]$; $[\underline{\underline{H}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} [\text{m}]$; $[\underline{\underline{C}}] = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} [\text{m}]$;
 $\vec{d} = (12\vec{e}_x + 18\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) [\text{m}^3]$; $\vec{f} = (21\vec{e}_x - 7\vec{e}_y + 7\vec{e}_z) [\text{m}^3]$;
 $[\underline{\underline{A}}]_{sz} = \begin{bmatrix} -12 & -7 & -0,5 \\ -7 & 6 & -3,5 \\ -0,5 & -3,5 & 1 \end{bmatrix} [\text{m}^2]$; $[\underline{\underline{A}}]_{asz} = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -3,5 \\ -11 & 0 & -2,5 \\ 3,5 & 2,5 & 0 \end{bmatrix} [\text{m}^2]$.

3 Írja fel annak a leképezésnek a mátrixát, amely az (xy) sík bármely pontjához



(a) az origóra vonatkozó szimmetriapontját

(b) az x -tengelyre vonatkozó szimmetriapontját

(c) $\varphi = 30^\circ$ -kal (z körüli, óra járásával ellenkező irányú) elforgatottját

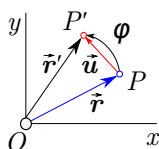
rendeli!

Megoldás: $[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

4 Adja meg annak a tenzornak a mátrixát,

(a) amely az (xy) sík bármely \vec{r} helyvektorához annak z körüli (+értelmű), tetszőleges φ szöggel történő elforgatásából adódó \vec{u} elmozdulási vektorát rendeli!

(b) Hogyan módosul a mátrix, ha φ értéke kicsi ($\ll 1$)?



(c) Miben változik a megoldás, ha az (xyz) tér tetszőleges pontjába mutató helyvektorra kell értelmezni a transzformációt?

(d) Tegyük fel, hogy általános helyzetű a forgásvektor (de $\varphi \ll 1$), ekkor miként változik a transzformációt meghatározó tenzor mátrixa?

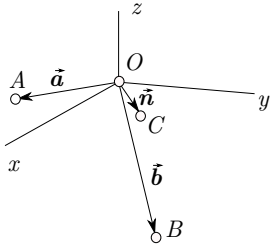
Megoldás: $[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix}$; $[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{bmatrix}$;
 $[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}$.

- 5 Írja fel az (xyz) KR bázisvektorainak diadikus szorzatait, illetve azok mátrixát! Ezek felhasználásával adja meg az egységtenzor diadikus előállítását!

Megoldás: $[\underline{\underline{e}}_x \circ \underline{\underline{e}}_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $[\underline{\underline{e}}_x \circ \underline{\underline{e}}_y] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; stb. $[\underline{\underline{1}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{e}}_x \circ \underline{\underline{e}}_x + \underline{\underline{e}}_y \circ \underline{\underline{e}}_y + \underline{\underline{e}}_z \circ \underline{\underline{e}}_z$.

- 6 Adott az alábbi három vektor az (xyz) KR-ben:

$$\vec{a} = (\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) [\text{m}], \quad \vec{b} = (2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 6\vec{e}_z) [\text{m}], \quad \vec{n} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) [-]$$

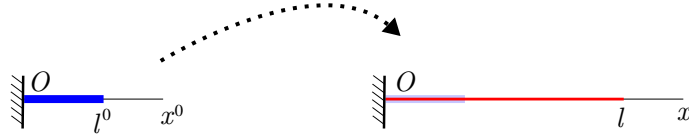


- (a) Írja fel az $\underline{\underline{F}} = \vec{a} \circ \vec{b}$ tenzor mátrixát az (xyz) KR-ben!
 (b) Számítsa ki a $\vec{g}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x$, $\vec{g}_y = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y$ és a $\vec{g}_z = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_z$ szorzatokat!
 (c) Van-e különbség az $\vec{n} \cdot \underline{\underline{F}}$ és a $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$ szorzatok eredménye között? Számítsa ki az eredményt az $\underline{\underline{F}}$ mátrixának felhasználásával és a nélkül is!

Megoldás: $[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -4 & -8 & 12 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} [\text{m}^2]$; $\vec{g}_x = (2\vec{e}_x - 4\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) [\text{m}^2]$; $\vec{g}_y = (4\vec{e}_x - 8\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) [\text{m}^2]$; $\vec{g}_z = (-6\vec{e}_x + 12\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) [\text{m}^2]$;
 $\vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \rightarrow [\vec{n}]^T [\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m}^2]$; $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} \rightarrow [\underline{\underline{F}}] [\vec{n}] = \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \\ -12 \end{bmatrix} [\text{m}^2]$.

- 7 Nagy alakváltozás 1D-ben. Az x tengellyel párhuzamos, egyik végén befogott, kezdetben $l^0 = 100$ [mm] hosszúságú vékony gumiszál pontjainak koordinátáit x^0 jelöli: $0 \leq x^0 \leq l^0$. A gumiszálat a háromszorosára nyújtjuk. Az egyenletesen megnyúlt gumiszál pontjainak koordinátáit x jelöli: $0 \leq x \leq l$, ahol l az alakváltozás utáni hossz.

(BE 4. alapján)

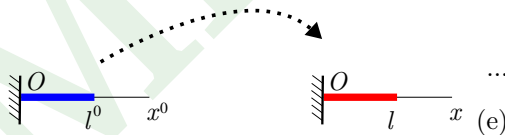


- (a) Írja fel a gumiszál l^0 és l hosszai, majd a tetszőleges anyagi pont x^0 és x koordinátái közötti összefüggést! Tüntesse fel az $x^0 = 50$ [mm] koordinátájú anyagi pont helyét mindkét állapotban!
- (b) Határozza meg a gumiszál végpontjának az elmozdulását, majd írja fel az x^0 koordinátájú pont elmozdulását leíró $u(x^0)$ elmozdulás-függvényt!
- (c) Számítsa ki a vonalelem arányt a végpontban, majd a tetszőleges x^0 koordinátájú pontban!
- (d) Számítsa ki a $\frac{du}{dx^0}$ és a $\frac{du}{dx}$ deriváltak értékeit! Döntse el (indoklással), hogy a gumiszál alakváltozása nagy-, vagy kismértékű!
- (e) Számítsa ki a gumiszál fajlagos (relatív) nyúlásainak értékeit: ε^0 a mérnöki, ε a valódi, ε^L a Lagrange-féle, ε^E az Euler-féle, ε^{\log} a logaritmikus (Hencky-féle) fajlagos nyúlást!

Megoldás: $l = l^0 3 = 300$ [mm]; $x(x^0) = 3x^0$; $x^0(x) = \frac{x}{3}$; $u(l^0) = 200$ [mm]; $u(x^0) = 2x^0$;
 $\frac{du}{dx^0} = 2$; $\frac{du}{dx} = \frac{2}{3}$; nagy alakváltozás; $\lambda = 3$;
 $\varepsilon^0 = 2$; $\varepsilon = \frac{2}{3}$; $\varepsilon^L = 4$; $\varepsilon^E = \frac{4}{3}$; $\varepsilon^{\log} = \ln 3 = 1,0986122$.

- 8 Kis alakváltozás 1D-ben. Az x tengellyel párhuzamos, egyik végén befogott, kezdetben $l^0 = 100$ [mm] hosszúságú vékony acélszál (gitárhúr) pontjainak koordinátáit x^0 jelöli: $0 \leq x^0 \leq l^0$. Az alakváltozása során az acélszálat az 1,003-szorosára nyújtjuk. Az egyenletesen megnyúlt gitárhúr pontjainak koordinátáit x jelöli: $0 \leq x \leq l$, ahol l az alakváltozás utáni hossz.

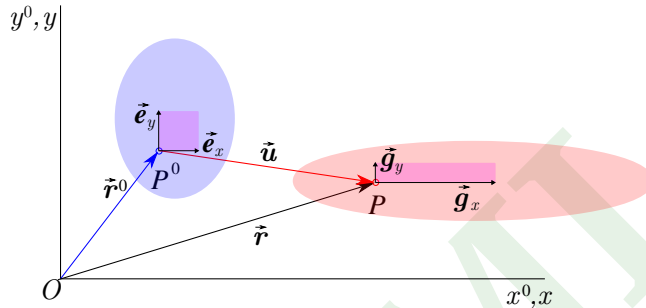
(BE 5. alapján)



- (a) Válaszolja meg az előző, 7 feladat kérdéseit!

Megoldás: $l = 1,003l^0 = 100,3$ [mm]; $x(x^0) = 1,003x^0$; $x^0(x) = \frac{x}{1,003}$; $u(l^0) = 0,3$ [mm]; $u(x^0) = 0,003x^0$;
 $\frac{du}{dx^0} = 0,003$; $\frac{du}{dx} = 0,002991$; kis alakváltozás; $\lambda = 1,003$;
 $\varepsilon^0 = 0,003$; $\varepsilon = 0,002991$; $\varepsilon^L = 0,0030045$; $\varepsilon^E = 0,0029865$; $\varepsilon^{\log} = 0,0029955$.

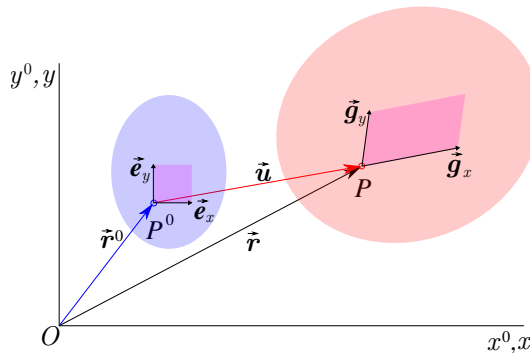
- 9 Nagy alakváltozás 2D-ben. A szilárd test \mathcal{P} anyagi pontja alakváltozás előtt a $P^0(x^0, y^0)$ koordinátájú geometriai pontban, alakváltozás után a $P(x, y)$ koordinátájú geometriai pontban helyezkedik el. A P^0 pontbeli \vec{e}_x, \vec{e}_y bázisvektorok által kifeszített egység oldalú elemi négyzet pontjai alakváltozás után a $\vec{g}_x = 3\vec{e}_x$ és a $\vec{g}_y = 0,5\vec{e}_y$ vektorok által kifeszített téglalap pontjait foglalják el az ábrának megfelelően (a \mathcal{P} anyagi pont környezetében az alakváltozás olyan, hogy az eredetileg egymásra \perp x^0 és y^0 által kijelölt anyagi vonalak alakváltozás után is egyenesek és \perp maradnak, hosszuk viszont változik). (BE 7. alapján)



- (a) Írja fel a \mathcal{P} anyagi pont elemi környezetének alakváltozását leíró $\underline{\underline{F}}$ alakváltozási gradiens tenzor mátrixát az (x^0, y^0) KR-ben, majd adja meg az $\underline{\underline{F}}$ tenzort invariáns alakban!
- (b) Írja fel az alakváltozási gradiens és az $\vec{u} \circ \nabla^0$ elmozdulási gradiens tenzor közötti kapcsolatot, majd adja meg az $\vec{u} \circ \nabla^0$ mátrixát az (x^0, y^0) KR-ben! Állapítsa meg, hogy a vizsgált pontban az alakváltozás nagy-, vagy kismértékű, majd szemléltesse az $\vec{u} \circ \nabla^0$ tenzor koordinátáit!
- (c) Számítsa ki a P^0 pontbeli x^0 és y^0 irányú anyagi vonalak vonalelem arányait és fajlagos nyúlásait a kezdeti hosszakra vonatkoztatva (mérnöki nyúlások)! Számítsa ki a P^0 pontbeli x^0 és y^0 irányú anyagi vonalak relatív szögtorzulását!
- (d) Számítsa ki a P^0 pontbeli $\vec{e}_n = 0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y$ irányú anyagi vonal alakváltozás utáni \vec{g}_n érintő vektorát, majd határozza meg az anyagi vonal vonalelem arányát és fajlagos nyúlását a kezdeti hosszra vonatkoztatva!
- (e) Számítsa ki a P^0 pontbeli \vec{e}_n irányú anyagi vonal és a rá merőleges $\vec{e}_m = -0,8\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_y$ irányú anyagi vonalak relatív szögtorzulását!

Megoldás: $[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$; $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \vec{u} \circ \nabla^0 = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}$; $\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}$;
 $\lambda_x = 3$; $\lambda_y = 0,5$; $\varepsilon_x^0 = 2$; $\varepsilon_y^0 = -0,5$; $\gamma_{xy} = 0^\circ$; $\lambda_n = 1,8439$; $\varepsilon_n^0 = 0,8439$; $\gamma_{mn} = -70,35^\circ = -1,2278$ [rad].

- 10 Nagy alakváltozás 2D-ben. Az előző feladatban vizsgált szilárd test alakváltozása legyen most olyan, hogy a P^0 pontbeli \vec{e}_x és \vec{e}_y bázisvektorok által kifeszített egység oldalú elemi négyzet pontjai alakváltozás után a $\vec{g}_x = 2,5\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_y$ és a $\vec{g}_y = 0,2\vec{e}_x + 1,4\vec{e}_y$ vektorok által kifeszített paralelogramma pontjait foglalják el. (A \mathcal{P} anyagi ponton áthaladó, egymásra merőleges x^0 és y^0 koordinátavonalakkal egybeeső anyagi vonalak alakváltozás után **nem** maradnak egyenesek és egymásra \perp és hosszuk is változik). (BE 6. alapján)



- (a) Válaszolja meg az előző, 9 feladat kérdéseit!

...

- (e)

Megoldás: $[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 2,5 & 0,2 \\ 0,5 & 1,4 \end{bmatrix}$; $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \vec{u} \circ \nabla^0 = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}$; $\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$; $\lambda_x = 2,5495$; $\lambda_y = 1,4142$; $\varepsilon_x^0 = 1,5495$; $\varepsilon_y^0 = 0,4142$;
 $\gamma_{xy} = 19,44^\circ = 0,3328$ [rad]; $\lambda_n = 2,1845$; $\varepsilon_n^0 = 1,1845$; $\gamma_{mn} = -36,28^\circ = -0,6333$ [rad].

- 11 *Kis alakváltozás 2D-ben.* Az előző feladatban vizsgált szilárd test megterhelése során a P pontbeli \vec{e}_x és \vec{e}_y bázisvektorok által kifeszített egység oldalú elemi négyzet pontjai alakváltozás után a

(BE. 7. alapján)

$$\vec{g}_x = 1,0015\vec{e}_x + 0,0005\vec{e}_y \quad \text{és a} \quad \vec{g}_y = 0,0002\vec{e}_x + 1,0004\vec{e}_y$$

vektorok által kifeszített paralelogramma pontjait foglalják el. Válaszolja meg a 9 feladat (a)...(e) kérdéseit, valamint az alábbiakat!

- (f) Állítsa elő a kis alakváltozások leírására alkalmas $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási tenzort, majd ellenőrizze, hogy az $\underline{\underline{A}}$ tenzor koordinátái valóban megegyeznek a (c) pontban kiszámított fajlagos nyúlásokkal és szögtorzulással!
- (g) Az $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási tenzor ismeretében számítsa ki az

$$\vec{e}_n = 0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y \quad \text{és az} \quad \vec{e}_m = -0,8\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_y$$

irányú anyagi vonalak relatív nyúlásait és fajlagos szögtorzulását, majd ellenőrizze, hogy az eredmények megegyeznek a (d) és (e) pontokban kiszámított eredményekkel!

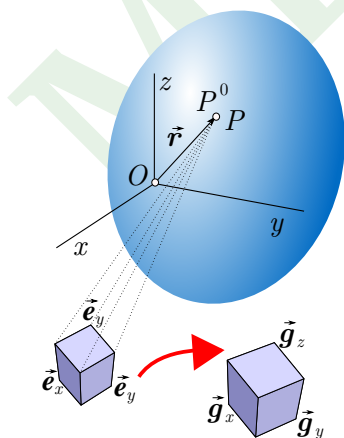
Megoldás: $[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 1,0015 & 0,0002 \\ 0,0005 & 1,0004 \end{bmatrix}$; $[\underline{\underline{U}}] = \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$; $\lambda_x = 1,0015$; $\lambda_y = 1,0004$; $\varepsilon_x^0 = 0,0015 \approx \varepsilon_x$; $\varepsilon_y^0 = 0,0004 \approx \varepsilon_y$;
 $\gamma_{xy} = 0,04^\circ = 0,000699$ [rad]; $\gamma_{mn} = -0,07^\circ = -0,00125$ [rad];
 $[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} 15,0 & 3,5 \\ 3,5 & 4,0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_n = 11,32 \cdot 10^{-4}$; $\gamma_{mn} = -0,00125$ [rad]

- 12 *Kis alakváltozás 3D-ben.* Egy szilárd test alakváltozása során a P^0 pontbeli $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ bázisvektorok által kifeszített egység oldalú elemi kocka pontjai a P pontbeli

(MPt.II. 3.9 alapján)

$$\vec{g}_x = 1,002\vec{e}_x + 0,004\vec{e}_z \quad \vec{g}_y = 1,002\vec{e}_y - 0,002\vec{e}_z \quad \vec{g}_z = -0,002\vec{e}_x + 0,996\vec{e}_z$$

vektorok által kifeszített paralelepipedon pontjaiba mozdulnak el.



- (a) Írja fel az $\underline{\underline{F}}$ alakváltozási gradiens és az $\underline{\underline{U}}$ elmozdulási gradiens tenzorok mátrixait. Állapítsa meg, hogy a vizsgált pontban az alakváltozás nagy-, vagy kismértékű, majd szemléltesse az elmozdulási gradiens koordinátáit az elemi triéderen!
- (b) Határozza meg a $P^0 \approx P$ pontbeli $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási tenzor mátrixát, majd nevezze meg a tenzor koordinátáit!
- (c) Határozza meg a $P^0 \approx P$ pontbeli $\underline{\underline{\Psi}}$ szögelfordulás tenzor mátrixát, majd határozza meg a $\vec{\phi}$ szögelfordulás vektort!
- (d) Határozza meg az $\vec{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$ és az $\vec{e}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$ egységvektorokhoz tartozó fajlagos nyúlásokat és γ_{mn} fajlagos szögtorzulásukat!

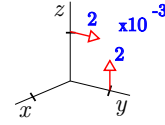
Megoldás: $[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 1,002 & 0 & -0,002 \\ 0 & 1,002 & 0 \\ 0,004 & -0,002 & 0,996 \end{bmatrix}$; $[\underline{\underline{U}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; kismértékű alakv. «1»;
 $[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; $[\underline{\underline{\Psi}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$ [rad]; $\vec{\phi} = (-\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \cdot 10^{-3}$ [rad];
 $\varepsilon_n = 0$; $\varepsilon_m = -0,002$; $\gamma_{mn} = 6 \cdot 10^{-3}$ [rad]

- 13 A rugalmas test elmozdulásmezője az $\underline{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{r}})$ függvénnyel adott.

(MPt.II. 3.6 alapján)

A test Q pontjának helyvektora $\vec{\mathbf{r}}_Q = 2\vec{\mathbf{e}}_x$ [mm].

$$\underline{\mathbf{u}} = \vartheta z \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{R}}, \quad \text{ahol} \quad \vartheta = 2 \cdot 10^{-3} \text{ [1/mm]}; \quad \vec{\mathbf{R}} = x\vec{\mathbf{e}}_x + y\vec{\mathbf{e}}_y.$$



- (a) Írja fel $\underline{\mathbf{U}}_Q$ elmozdulási gradiens, az $\underline{\mathbf{A}}_Q$ alakváltozási- és a $\underline{\mathbf{\Psi}}_Q$ szögelfordulás tenzorok mátrixát!
 (b) Adja meg $\vec{\mathbf{e}}_n = 0,6\vec{\mathbf{e}}_y + 0,8\vec{\mathbf{e}}_z$ irányhoz tartozó ε_n fajlagos nyúlást!
 (c) Szemléltesse az $\underline{\mathbf{A}}_Q$ tenzort az (xyz) KR tengelyeivel párhuzamos élű, Q kezdőpontú elemi triéderen!

Megoldás: $[\underline{\mathbf{U}}]_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; $[\underline{\mathbf{A}}]_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; $[\underline{\mathbf{\Psi}}]_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_n = 1,92 \cdot 10^{-3}$.

- 14 Az (xyz) KR P pontjában ismeretesek egy rugalmas test alakváltozási jellemzői:

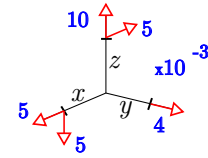
(MPt.II. 3.13 alapján)

A kocka alakváltozását a következő

$$\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-3} \quad \varepsilon_y = 4 \cdot 10^{-3} \quad \varepsilon_z = 10^{-2}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0 \quad \text{és} \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = -10^{-2}.$$

alakváltozási koordináták írják le az (xyz) KR-ben. (homogén deformáció!)



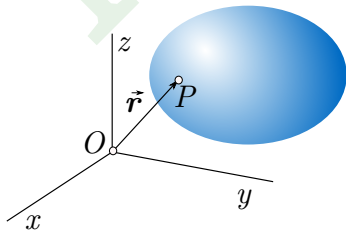
- (a) Szemléltesse elemi triéderen a P pontbeli alakváltozási állapotot!
 (b) Számítsa ki az ε_n fajlagos nyúlást és a γ_{yn} szögtorzulást, ha $\vec{\mathbf{e}}_n = 0,8\vec{\mathbf{e}}_x + 0,6\vec{\mathbf{e}}_z$!

Megoldás: $[\underline{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_n = 2 \cdot 10^{-3}$; $\gamma_{yn} = 0$.

- 15 Egy szilárd test elmozdulásmezője az (xyz) KR-ben:

(MPt.II. 3.7 alapján)

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{u}}(x, y, z) = -\frac{\nu}{R}xy\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{2R}(\nu x^2 - \nu y^2 - z^2)\vec{\mathbf{e}}_y + \frac{1}{R}yz\vec{\mathbf{e}}_z \quad \text{ahol} \quad R = 10^3 \text{ [mm]} \quad \nu = 0,25$$



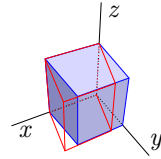
- (a) Határozza meg az $\underline{\mathbf{U}}$ elmozdulási és az $\underline{\mathbf{F}}$ alakváltozási gradiens tenzorok mátrixát az $\vec{\mathbf{r}}_P = (4\vec{\mathbf{e}}_x - 2\vec{\mathbf{e}}_y + 5\vec{\mathbf{e}}_z)$ [mm] helyvektorú P pontban!
 (b) Írja fel a P pontbeli $\underline{\mathbf{A}}$ alakváltozási tenzor, a $\underline{\mathbf{\Psi}}$ szögelfordulás tenzor mátrixát és a $\vec{\boldsymbol{\phi}}$ szögelfordulás vektort!
 (c) Számítsa ki az $\vec{\mathbf{e}}_n = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{e}}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mathbf{e}}_y$ és az $\vec{\mathbf{e}}_m = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{e}}_y$ irányú anyagi vonalak relatív nyulásait és fajlagos szögtorzulásukat!

Megoldás: $[\underline{\mathbf{U}}] = \begin{bmatrix} 0,5 & -1 & 0 \\ 1 & 0,5 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; $[\underline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1,0005 & -0,001 & 0 \\ 0,001 & 1,0005 & -0,005 \\ 0 & 0,005 & 0,998 \end{bmatrix}$;
 $[\underline{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; $[\underline{\mathbf{\Psi}}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; $\vec{\boldsymbol{\phi}} = (5\vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\mathbf{e}}_z) \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_n = 0,5 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_m = 0,5 \cdot 10^{-3}$; $\gamma_{mn} = 0$.

- 16) Az egységnyi oldalú kocka egyik sarka az (xyz) KR origójában helyezkedik el, három oldalélét az \vec{e}_x , \vec{e}_y és \vec{e}_z bázisvektorok határozzák meg.

A kocka alakváltozását az

$$[\underline{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \gamma > 0$$

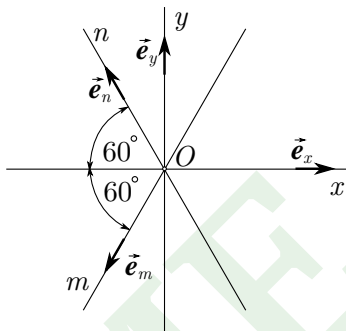


alakváltozási gradiens írja le az (xyz) KR-ben. (homogén deformáció!)

- (a) Írja fel a \vec{g}_x , \vec{g}_y és \vec{g}_z bázisvektorokat a kocka egy tetszőleges pontjában, majd ábrázolja a kocka alakváltozás előtti és utáni helyzetét, ha a kocka origójával egybeeső sarokpontja alakváltozás közben nem mozdul el!
 (b) Határozza meg a kocka $\underline{\mathbf{A}}$ és $\underline{\mathbf{\Psi}}$ tenzorok mátrixát és a $\vec{\phi}$ vektort!
 (c) Milyen feltétel esetén érvényes a linearizálás során alkalmazott $\underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} \approx \underline{\mathbf{1}} + 2\underline{\mathbf{A}}$ közelítés?

Megoldás: $\vec{g}_x = \vec{e}_x$; $\vec{g}_y = \gamma\vec{e}_x + \vec{e}_y$; $\vec{g}_z = \vec{e}_z$; $[\underline{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $[\underline{\mathbf{\Psi}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ -\frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\vec{\phi} = -\frac{1}{2}\gamma\vec{e}_z$; ha $1 + \gamma^2 \approx 1$, azaz $\gamma \ll 1$.

- 17) Vizsgáljuk egy próbatest felületének O pontjában az alakváltozást. (MPt.II. 3.16 alapján)



Az x , n és m tengelyek irányában mért fajlagos nyúlások adottak:

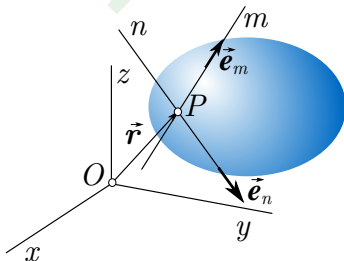
$$\varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_n = 0,5 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_m = 4 \cdot 10^{-4}.$$

A z tengely alakváltozási főtengele $\rightarrow \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

- (a) Írja fel az n és az m tengelyekhez tartozó \vec{e}_n és \vec{e}_m egység irányvektorokat!
 (b) Határozza meg az ε_y fajlagos nyúlást és a γ_{xy} szögtorzulást!

Megoldás: $\vec{e}_n = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$; $\vec{e}_m = -\frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$; $\varepsilon_y = 2,3 \cdot 10^{-4}$; $\gamma_{xy} = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-4}$.

- 18) Valamely test P pontjában, az (xyz) KR-ben (MPt.II. 3.9 alapján)



adott az elmozdulási gradiens tenzor mátrixa:

$$[\underline{\mathbf{U}}]_P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

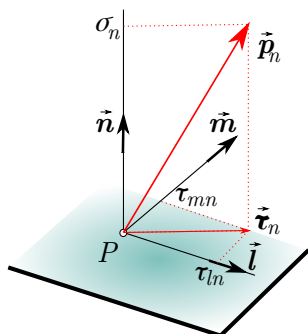
$$\vec{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z \quad \vec{e}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$$

- (a) Határozza meg az $\underline{\mathbf{A}}_P$ alakváltozási és a $\underline{\mathbf{\Psi}}_P$ forgató tenzorok mátrixát!
 (b) Számítsa ki az ε_n fajlagos nyúlást és a γ_{mn} fajlagos szögtorzulást!

Megoldás: $[\underline{\mathbf{A}}]_P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; $[\underline{\mathbf{\Psi}}]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_n = 0$; $\gamma_{mn} = 6 \cdot 10^{-3}$.

- 19) Ismeretes az \vec{n} normálisú elemi felület P pontjában a felületen megoszló ER sűrűségvektora \vec{p}_n .

(MPt.II. 3.17 alapján)



$$\vec{n} = 0,8\vec{e}_y + 0,6\vec{e}_z;$$

$$\vec{p}_n = (-400\vec{e}_x + 300\vec{e}_y + 100\vec{e}_z) \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

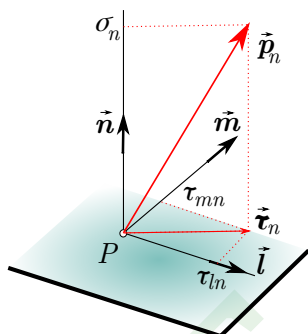
Határozza meg az elemi felület P pontjában a

- σ_n normál feszültséget!
- $\vec{\tau}_n$ csúsztatófeszültség vektort!
- τ_{mn} csúsztatófeszültséget, $\vec{m} = -0,6\vec{e}_y + 0,8\vec{e}_z$!

Megoldás: $\sigma_n = 300 \text{ [N/mm}^2\text{]}$; $\vec{\tau}_n = (-400\vec{e}_x + 60\vec{e}_y - 80\vec{e}_z) \text{ [N/mm}^2\text{]}$; $\tau_{mn} = -100 \text{ [MPa]}$.

- 20) Számítsa ki a P pontban az \vec{n} normálisú síkon fellépő \vec{p}_n feszültségvektor σ_n , τ_{mn} és τ_{ln} koordinátáit!

(MPt.II. 3.18 alapján)



$$\vec{n} = 0,5\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$$

$$\vec{m} = -0,5\vec{e}_x - 0,5\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$$

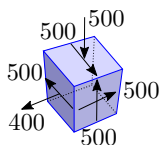
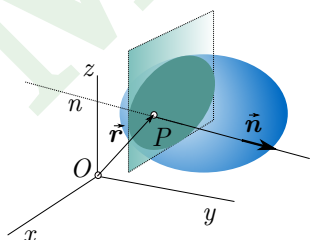
$$\vec{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$$

$$\vec{p}_n = (581\vec{e}_x - 100\vec{e}_y + 200\vec{e}_z) \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

Megoldás: $\sigma_n = 381,92 \text{ [MPa]}$; $\tau_{mn} = -99,1 \text{ [MPa]}$; $\tau_{ln} = 481,5 \text{ [MPa]}$.

- 21) Egy szilárd test P pontjában ismert a $\underline{\underline{T}}_P$ feszültségi tenzor.

(MPt.II. 3.20 alapján)



$$[\underline{\underline{T}}]_P = \begin{bmatrix} 400 & -500 & 0 \\ -500 & 0 & 500 \\ 0 & 500 & -500 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

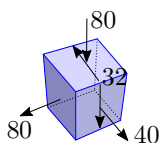
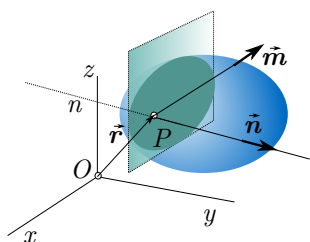
$$\vec{n} = 0,8\vec{e}_y + 0,6\vec{e}_z$$

- Határozza meg a P pontban az \vec{e}_x , \vec{e}_y és \vec{e}_z normálisú elemi felületekhez tartozó \vec{p}_x , \vec{p}_y és \vec{p}_z feszültségvektorokat!
- Írja fel az \vec{n} normálisú elemi felületen a \vec{p}_n feszültségvektort, a σ_n normál feszültséget és a $\vec{\tau}_n$ csúsztatófeszültség vektort!
- Szemléltesse a P pont feszültségi állapotát az elemi kockán!

Megoldás: $\vec{p}_x = (400\vec{e}_x - 500\vec{e}_y) \text{ [MPa]}$; $\vec{p}_y = (-500\vec{e}_x + 500\vec{e}_z) \text{ [MPa]}$; $\vec{p}_z = (500\vec{e}_y - 500\vec{e}_z) \text{ [MPa]}$;
 $\vec{p}_n = (-400\vec{e}_x + 300\vec{e}_y + 100\vec{e}_z) \text{ [MPa]}$; $\sigma_n = 300 \text{ [MPa]}$; $\vec{\tau}_n = (-400\vec{e}_x + 60\vec{e}_y - 80\vec{e}_z) \text{ [MPa]}$.

- 22 Adott a feszültségi tenzor mátrixa az xyz koordináta rendszerben.

(Fsz. 2.7 alapján)



$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -32 \\ 0 & -32 & -80 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

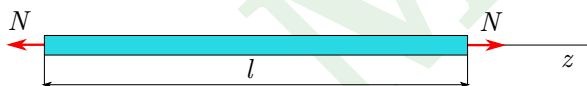
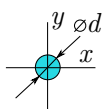
$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{17}}(4\vec{e}_y - \vec{e}_z), \quad \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{17}}(\vec{e}_y + 4\vec{e}_z).$$

- (a) Írja fel a feszültségi tenzor diadikus előállítását, majd szemléltesse a feszültségi állapotot az elemi kockán!
 (b) Számítsa ki az \vec{n} és \vec{m} normálisú felületeken ébredő σ_n és σ_m normálfeszültséget, valamint a τ_{mn} nyírófeszültséget!

Megoldás: $\underline{T} = [80\vec{e}_x \circ \vec{e}_x + (40\vec{e}_y - 32\vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + (-32\vec{e}_y - 80\vec{e}_z) \circ \vec{e}_z]$ [MPa]; $\sigma_n = 48$ [MPa]; $\sigma_m = -88$ [MPa]; $\tau_{mn} = 0$ [MPa]

- 23 Ismeretes a húzásra igénybevett kör KM-ű prizmatikus rúdszakasz l terheletlen hossza és d átmérője.

(MPt.II. 4.1 alapján)



$$l = 250 \text{ [mm]},$$

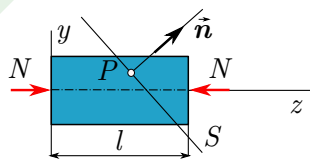
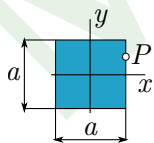
$$d = 25 \text{ [mm]}$$

- (a) Mekkora a rúdszakasz l_2 hossza $N_2 = 50$ [kN] húzóerő esetén, ha $N_1 = 100$ [kN] húzóerő mellett $l_1 = 250,27$ [mm] a rúdszakasz hossza és a rúd anyaga lineárisan rugalmas?
 (b) Mekkora az N_3 húzóerő, ha a KM pontjaiban $\sigma_{z3} = 80$ [MPa] feszültség ébred?
 (c) Határozza meg az anyag E rugalmassági modulusát!

Megoldás: $l_2 = 250,135$ [mm]; $N_3 = 39,2699$ [kN]; $E = 188\,628$ [MPa].

- 24 A négyzet KM-ű zömök rúdszakasz nyomásra van igénybevéve.

(MPt.II. 4.2 alapján)



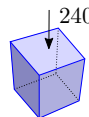
$$N = 600 \text{ [kN]}, \quad a = 50 \text{ [mm]}, \quad l = 100 \text{ [mm]}$$

$$\vec{n} = 0,6\vec{e}_y + 0,8\vec{e}_z, \quad E = 200 \text{ [GPa]}; \quad \nu = 0,3.$$

- (a) Rajzolja meg a $z = 0$ KM-ben ébredő feszültségek eloszlásának jellegét az x és y koordináták függvényében!
 (b) Határozza meg a $P(25; 12; 5; 40)$ [mm] pontban a $[\underline{T}]_P$ feszültségi tenzor és az $[\underline{A}]_P$ alakváltozási tenzor mátrixát és szemléltesse azt a P pont környezetéből kivett elemi kockán!
 (c) Írja fel a P ponton átmenő \vec{n} normálisú S síkon fellépő σ_n normálfeszültséget!
 (d) Ellenőrizze a rudat feszültségcsúcsra, ha $\sigma_{jell} = 400$ [MPa], $n = 1,6$!

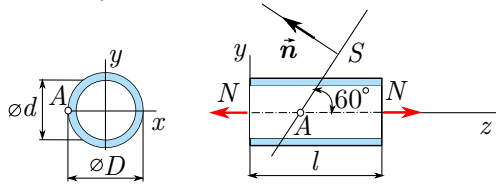
Megoldás: $\sigma_z(x, y) = -240$ [MPa] = áll.; $[\underline{T}]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -240 \end{bmatrix}$ [MPa];

$[\underline{A}]_P = \begin{bmatrix} 0,36 & 0 & 0 \\ 0 & 0,36 & 0 \\ 0 & 0 & -1,2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$ [-]; $\sigma_n = -153,6$ [MPa]; MEGFELEL.



- 25) A vékonyfalú cső l hosszúságú szakaszának húzás az igénybevétele. Az E rugalmassági modulusz és a ν Poisson-tényező ismert.

(MPt.II. 4.3 alapján)



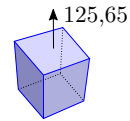
$$N = 30 \text{ [kN]}, D = 40 \text{ [mm]}, d = 36 \text{ [mm]},$$

$$E = 200 \text{ [GPa]}, \nu = 0,25.$$

- Számítsa ki az A pontban ébredő σ_z feszültség értékét!
- Szemléltesse az A pontbeli feszültségi állapotot a pont környezetéből kivett (az xyz tengellyel \parallel élű) elemi kockán!
- Adja meg az A pontban a $\underline{\underline{T}}_A$ feszültségi tenzort, és írja fel azt a diadikus szorzatok segítségével!
- Határozza meg számítással az S síkon ébredő σ_n és $\vec{\tau}_n$ feszültség komponenseket!

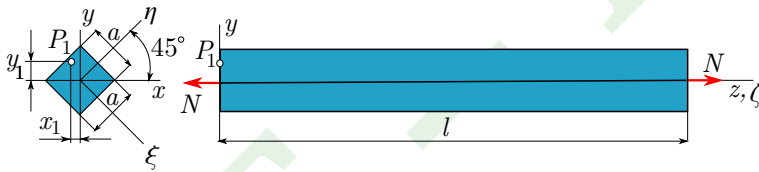
Megoldás: $\sigma_z(A) = 125,65 \text{ [MPa]}$; $\underline{\underline{T}}_A = 125,65 \vec{e}_z \circ \vec{e}_z \text{ [MPa]}$; $[\underline{\underline{T}}]_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 125,65 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$;

$\sigma_n = 94,24 \text{ [MPa]}$; $\vec{\tau}_n = (-47,12\vec{e}_y - 27,195\vec{e}_z) \text{ [MPa]}$.



- 26) Négyzet keresztmetszetű rúd l hosszúságú szakaszát N erők centrikusan húzásra terhelik. Az l hosszúságú szakasz megnyúlása Δl az N húzóerő hatására.

(MPt.II. 4.4 alapján)



$$a = 20 \text{ [mm]}, l = 200 \text{ [mm]},$$

$$\Delta l = 20 \text{ [\mu m]},$$

$$x_1 = 3 \text{ [mm]}, y_1 = 5 \text{ [mm]},$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ [N/mm}^2\text{]}, \nu = 0,3$$

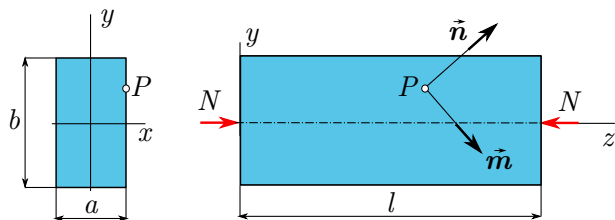
- Határozza meg a z irányú ε_z fajlagos nyúlást!
- Számítsa ki az x és az y irányú ε_x és ε_y fajlagos nyúlásokat!
- Írja fel a P_1 pontbeli $\underline{\underline{A}}_{P_1}$ alakváltozási tenzor mátrixát az xyz KR-ben és a $\xi\eta\zeta$ KR-ben!
- Határozza meg a P_1 pontbeli feszültségi tenzor mátrixát!
- Mekkora N erővel kell a rudat terhelni, hogy az a méret változása $\Delta a = -4,5 \text{ [\mu m]}$ legyen?
- Megfelel-e a tartó a (d) és (e) pontok esetén, ha a tönkremenetelre jellemző feszültség $\sigma_{jell} = 100 \text{ [MPa]}$, a biztonsági tényező $n = 2$?
- Méretezze a tartót $N = 150 \text{ [kN]}$ terhelésre, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 60 \text{ [MPa]}$!

Megoldás: $\varepsilon_z = 10^{-4} [-]$; $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -3 \cdot 10^{-5} [-]$; $[\underline{\underline{A}}]_{P_1} = [\underline{\underline{A}}]_{P_1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} [-]$; $[\underline{\underline{T}}]_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$;

$N = 60 \text{ [kN]}$; IGEN/NEM; $a = 50 \text{ [mm]}$.

- 27 A téglalap KM-ű rudat az $N < 0$ erő nyomásra terheli.

(MPt.II. 4.6 alapján)



$$a = 20 \text{ [mm]}; \quad \vec{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_z \right) [-],$$

$$b = 40 \text{ [mm]}; \quad \vec{m} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_z \right) [-];$$

$$P(10; 10; 60) \text{ [mm]}; \quad E = 200 \text{ [GPa]}; \quad \nu = 0,25;$$

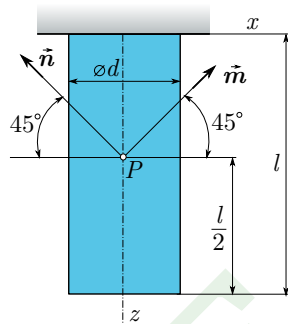
$$l = 100 \text{ [mm]}; \quad \gamma_{mn} = -2,5 \cdot 10^{-4} [-]$$

- (a) Mekkora N nyomóerő esetén lesz az \vec{n} és \vec{m} egységvektorokkal kijelölt egyenesek egymással bezárt $\frac{\pi}{2}$ szögének változása a terhelés hatására γ_{mn} ?
- (b) Határozza meg a rúd Δl megnyúlását!
- (c) Határozza meg a rúdban felhalmozódó U belső energia értékét!

Megoldás: $N = -40 \text{ [kN]}; \Delta l = -25 \text{ [}\mu\text{m]}; U = 0,5 \text{ [J]}.$

- 28 Ismeretes a befogott kör KM-ű rúd \underline{T} feszültségi tenzorának mátrixa az xyz KR-ben, mely a z koordináta függvénye, vagyis a feszültségi tenzormező.

(MPt.II. 4.8 alapján)



$$G = 80 \text{ [GPa]}, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad l = 1 \text{ [m]},$$

$$\gamma = 78 \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \right], \quad \sigma_0 = \gamma \cdot l,$$

$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l-z}{l} \sigma_0 \end{bmatrix} \text{ [MPa];}$$

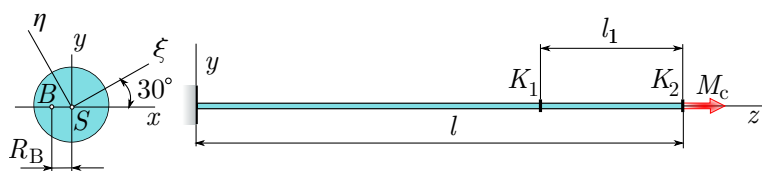
$$\vec{n} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right) [-]; \quad \vec{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right) [-]$$

- (a) Írja fel az \underline{A} alakváltozási tenzort a z koordináta függvényében!
- (b) Számítsa ki a P pontban az \vec{n} irányú ε_n fajlagos nyúlást, valamint az \vec{n} és \vec{m} irányok egymással bezárt szögének γ_{mn} fajlagos szögtorzulásának értékét!
- (c) Határozza meg a rúd Δl megnyúlását!

Megoldás: $\varepsilon_z = \frac{(l-z)\gamma}{2G(1+\nu)}; \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z; \varepsilon_n = 6,09 \cdot 10^{-8} [-]; \gamma_{mn} = 2,4375 \cdot 10^{-7} [-]; \Delta l = 1,8281 \cdot 10^{-7} \text{ [m]}$

- 29 A kör keresztmetszetű d átmérőjű egyik végén befalazott l hosszúságú rudat M_c csavarónyomaték terheli.

(MPt.II. 4.79 alapján)



$$M_c = 40 \text{ [Nm]}, \quad l = 500 \text{ [mm]},$$

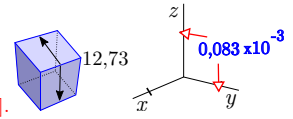
$$l_1 = 160 \text{ [mm]}, \quad d = 20 \text{ [mm]},$$

$$E = 200 \text{ [GPa]}, \quad \nu = 0,3, \quad R_B = 5 \text{ [mm]}$$

- (a) Határozza meg a K_1 KM-ben ható $\tau_{yz}(x)$, $\tau_{xz}(y)$ és a $\tau_{\eta z}(\xi)$ csúsztató feszültségek eloszlását az x , y illetve a ξ tengely mentén!
- (b) Írja fel a K_1 KM B pontjában a \underline{T}_B feszültségi tenzor mátrixát, és szemléltesse azt a B pont környezetéből kivett elemi kockán!
- (c) Határozza meg az \underline{A}_B alakváltozási tenzor mátrixát a B pontban és szemléltesse azt az elemi triéderen!

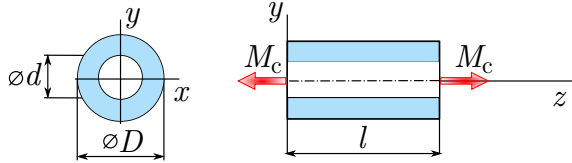
- (d) Számítsa ki a K_1 és a K_2 KM-ek egymáshoz viszonyított ϕ_{12} szögelfordulását!
 (e) Adja meg a rúd l hosszúságú szakaszán felhalmozódott U belső energia értékét!
 (f) Tegyük fel, hogy d ismeretlen, $\tau_{\text{meg}} = 80$ [MPa], méretezzük a így a rudat!

Megoldás: $\tau_{\varphi z} = 2,546R \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \right]$; $\tau_{\varphi z}^{\text{max}} = 25,46$ [MPa]; $[\underline{T}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12,73 \\ 0 & -12,73 & 0 \end{bmatrix}$ [MPa];
 $[\underline{A}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8,3 \\ 0 & -8,3 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$ [-]; $\phi_{12} = 5,3 \cdot 10^{-3}$ [rad]; $U = 0,331$ [J]; $d = 13,65$ [mm] \rightarrow 14 [mm].



- 30 Körgyűrű KM-ű rúd l hosszúságú szakaszát M_c csavarónyomaték terheli.

(MPt.II. 4.87 alapján)



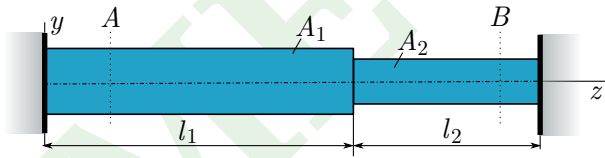
$M_c = 2$ [kNm], $D = 2d$,
 $G = 80$ [GPa], $\tau_{\text{meg}} = 60$ [MPa]

- (a) Méretezze a rudat! ($d = ?$)
 (b) Határozza meg a rúd $l = l^{\text{max}}$ hosszát, ha a két szélső KM egymáshoz viszonyított szögelfordulásának megengedett értéke $\phi_{\text{meg}} = 4 \cdot 10^{-3}$ [-]!

Megoldás: $d = 28,29$ [mm] \rightarrow 28,5 [mm], $l^{\text{max}} = 155,45$ [mm].

- 31 Merev lapok közé $t_1 = 253$ [K] hőmérsékleten szakaszonként állandó KM-ű rúd szerelnek. A szerelési hőmérsékleten a rúd feszültségmentes. A rúd anyagára a hőtágulási együttható α . A szerkezet $t_2 = 308$ [K] hőmérsékleten üzemel!

(MPt.II. 4.12 alapján)



$A_1 = 180$ [cm²], $A_2 = 100$ [cm²], $l_1 = 0,25$ [m],
 $l_2 = 0,15$ [m], $E = 200$ [GPa], $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$ [$\frac{1}{\text{K}}$]

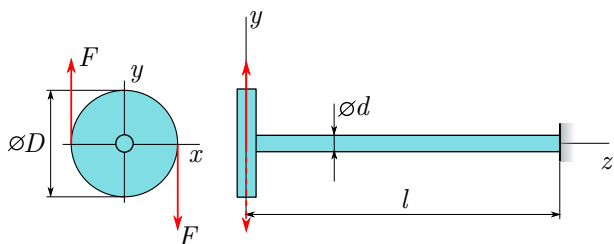
- (a) Mekkora lenne a rúd elmozdulása, ha nem lenne ott a jobb oldali megtámasztás?
 (b) Határozzuk meg az A és a B KM-ekben fellépő σ_A és σ_B feszültségek értékét!

Megoldás: $u = 0,275$ [mm], $\sigma_A = -105,76$ [MPa], $\sigma_B = -190,38$ [MPa].

- 32) A d átmérőjű rúdhoz mereven kapcsolódó D átmérőjű tárcsa kerületén, az ábra szerinti, állandó F erőkből álló erőpár működik. A rúd anyagára megengedett nyírófeszültség τ_{meg} .

$$F = 5 \text{ [kN]}, D = 0,4 \text{ [m]}, d = 60 \text{ [mm]}, \tau_{\text{meg}} = 60 \text{ [MPa]}, l = 1,2 \text{ [m]}.$$

(MPt.II. 4.81 alapján)

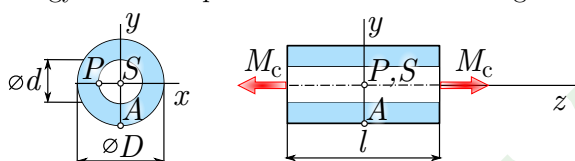


- (a) Határozza meg a rúd igénybevételét!
 (b) Hol van(nak) a KM veszélyes pontja(i) (VP)?
 (c) Ellenőrizze a rudat!

Megoldás: csavarás, VP: $R = \frac{d}{2}$, megfelel ($\tau_{\varphi z}^{\text{max}} = 47,16 \text{ [MPa]}$).

- 33) Körgyűrű KM-ű prizmatikus rúd l hosszúságú szakaszát M_c csavarónyomaték terheli.

(MPt.II. 4.82 alapján)

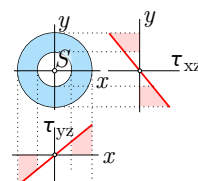


$$M_c = 5 \text{ [kNm]}, D = 70 \text{ [mm]}, d = 50 \text{ [mm]}, \\ G = 80 \text{ [GPa]}, l = 180 \text{ [mm]}, \\ \tau_{\text{meg}} = 60 \text{ [MPa]}$$

- (a) Rajzolja meg a $z = 0$ koordinátájú KM x és y tengelye mentén a τ_{yz} illetve a τ_{xz} feszültségek eloszlását!
 (b) Határozza meg a KM veszélyes pontjait!
 (c) Írja fel a $P(-25; 0; 0)$ [mm] pontban a feszültségi tenzor mátrixát!
 (d) Számítsa ki a P pontban az alakváltozási tenzor mátrixának koordinátáit!

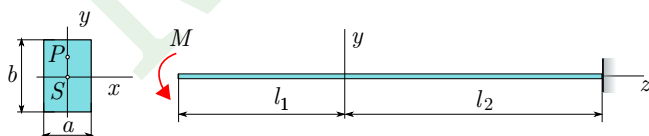
Megoldás: $\tau_{\varphi z} = 2,868R \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \right]$, VP: $R = \frac{D}{2}$, $[\underline{T}]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -71,7 \\ 0 & -71,7 & 0 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$,

$$[\underline{A}]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad [-] \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = -8,9614 \cdot 10^{-4}.$$

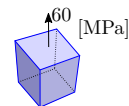


- 34) Az egyik végén befogott téglalap KM-ű prizmatikus rudat az ábra szerinti állandó M nyomatékú erőpár terheli.

(MPt.II. 4.53 alapján)



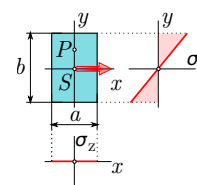
$$M = 80 \text{ [Nm]}, a = 10 \text{ [mm]}, b = 20 \text{ [mm]}, \\ E = 200 \text{ [GPa]}, l_1 = 2 \text{ [m]}, l_2 = 3 \text{ [m]} \\ \nu = 0,25, \sigma_{\text{meg}} = 180 \text{ [MPa]}$$



- (a) Rajzolja meg a $z = 0$ koordinátájú KM x és y tengelye mentén a feszültségek eloszlását!
 (b) Határozza meg a KM veszélyes pontjait!
 (c) Írja fel a $P(0; 5; 0)$ [mm] pontban a σ_z feszültség értékét!
 (d) Szemléltessük a P pontbeli feszültségi állapotot a pont környezetéből kivett elemi kockán!
 (e) Írja fel a P pontbeli \underline{T}_P feszültségi tenzor mátrixát!
 (f) Határozza meg a P pontbeli \underline{A}_P alakváltozási tenzor mátrixát!
 (g) Számítsa ki a rúdban felhalmozódó U belső energia értékét!

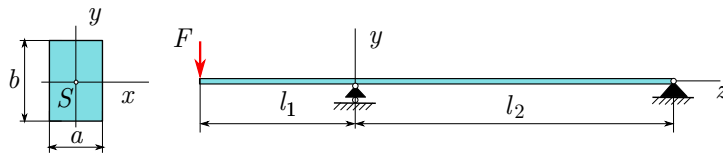
Megoldás: $\sigma_z = 12y \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \right]$, $\sigma_z^{\text{max}} = 120 \text{ [MPa]}$, VP: $y = \pm \frac{b}{2}$, $\sigma_z^P = 60 \text{ [MPa]}$, $U = 12 \text{ [Nm]}$,

$$[\underline{T}]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}, [\underline{A}]_P = \begin{bmatrix} -7,5 & 0 & 0 \\ 0 & -7,5 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} [-].$$



- 35 Téglalap KM-ű prizmatikus rúdból kialakított konzolos tartót az F erő terheli az ábrán látható módon. A tartó KM-ének méretei a és b adottak. A tartó anyagára megengedett feszültség σ_{meg} .

(MPt.II. 4.56 alapján)



$$a = 20 \text{ [mm]}, b = 40 \text{ [mm]},$$

$$l_1 = 1,5 \text{ [m]}, l_2 = 4 \text{ [m]}$$

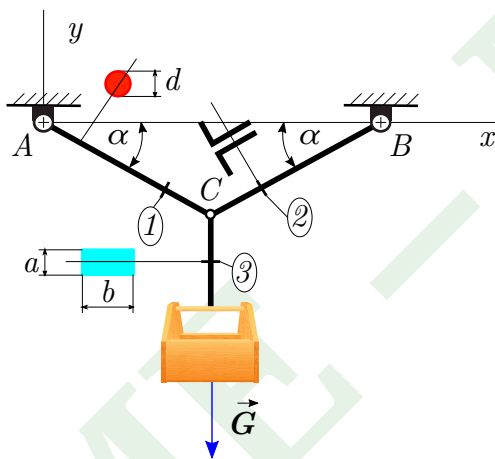
$$E = 200 \text{ [GPa]}, \sigma_{\text{meg}} = 150 \text{ [MPa]}$$

- (a) Határozza meg, hogy mekkora F^{max} erővel terhelhető a konzol vége!
 (b) Mekkora lesz a megengedhető erő, ha a KM-et z körül 90° -kal elfordítjuk?

Megoldás: $F^{\text{max}} = 533,3 \text{ [N]}$, $F^{\text{max}} = 266,6 \text{ [N]}$.

- 36 Három rúdból összeépített szerkezet függőleges rúdján G súlyú test függ. A rudak egyforma anyagból (E) készültek, csak a keresztmetszeteik különböznek.

(MPt.II. 4.14 alapján)



$$G = 150 \text{ [kN]}, d = 40 \text{ [mm]}, 2a = b,$$

$$l_1 = l_2 = 3 \text{ [m]}, l_3 = 2 \text{ [m]}, \alpha = 30^\circ,$$

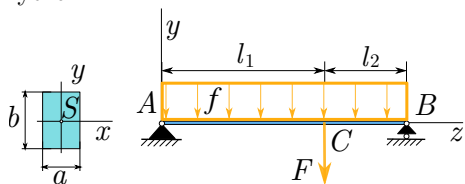
$$E = 200 \text{ [GPa]}, \sigma_F = 240 \text{ [MPa]}, n = 2.$$

- (a) Mekkora az egyes rudakban ébredő rúd-erők?
 (b) Ellenőrizze az 1 jelű rúd bejelölt KM-ét!
 (c) Határozza meg a 2 és a 3 jelű rudak szükséges KM-ét, majd méretezze a 2-es jelű rudat két darab L szelvényre, és a 3-as jelű rudat téglalap KM-re!
 (d) Számítsa ki az egyes rudakban felhalmozódó belső energia értékét!

Megoldás: $N_1 = N_2 = N_3 = 150 \text{ [kN]}$, megfelel, $A_{2sz} = A_{3sz} = 1250 \text{ [mm}^2]$, $U_1 = 134,28 \text{ [J]}$, $U_2 = 133,9 \text{ [J]}$, $U_3 = 90 \text{ [J]}$.

- 37 Ismeretes a prizmatikus tartó terhelése, KM alakja, anyagának σ_{jell} folyáshatára és az előírt biztonsági tényező.

(MPt.II. 4.65 alapján)



$$F = 9 \text{ [kN]}, f = 2 \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right], \sigma_{\text{jell}} = 330 \text{ [MPa]}, n = 2,$$

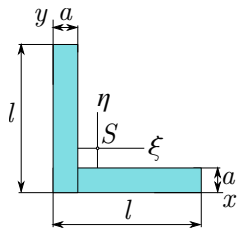
$$E = 200 \text{ [GPa]}, l_1 = 4 \text{ [m]}, l_2 = 2 \text{ [m]}, b = 2a.$$

- (a) Méretezzük a tartót feszültségcsúcsra ($a = ?$)!
 (b) Tegyük fel, hogy a tartó KM-e tömör kör. Ebben az esetben mekkora lesz a szükséges d átmérő?

Megoldás: $a = 57 \text{ [mm]}$, $d = 108 \text{ [mm]}$.

- 38 Adott az ábrán vázolt síkidom geometriája: $l = 60$ [mm], $a = 10$ [mm].

(MPt.II. 4.30 alapján)



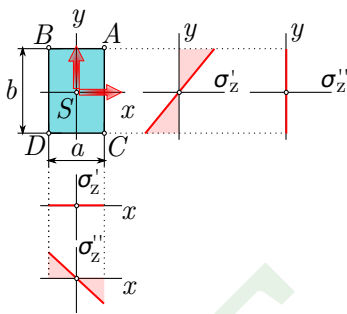
- (a) Határozzuk meg a síkidom S súlypontjának koordinátáit!
- (b) Számoljuk ki a síkidom S súlypontra vonatkozó $[\underline{I}]_S$ tehetetlenségi tenzor mátrixának elemeit!
- (c) Keressük meg a síkidom tehetetlenségi főirányait, és fő tehetetlenségi nyomatékait!

Megoldás: $x_S = 18,63$ [mm], $y_S = 18,63$ [mm], $[\underline{I}]_S = \begin{bmatrix} 354,62 & 204,54 \\ 204,54 & 354,62 \end{bmatrix} \cdot 10^3$ [mm⁴],
 $I_1 = 559,16 \cdot 10^3$ [mm⁴], $I_2 = 150,08 \cdot 10^3$ [mm⁴], $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$, $\vec{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$.

- 39 Téglalap KM-ű prizmatikus rúd K KM-ének igénybevétele az S súlypontba redukált $(\vec{F}, \vec{M}_S)_S$ eredő vektorkettőssel adott:

$\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{M}_S = (150\vec{e}_x + 120\vec{e}_y)$ [Nm], $a = 20$ [mm], $b = 40$ [mm].

(MPt.II. 5.10 alapján)



- (a) Rajzolja meg a KM-en a feszültségeloszlásokat az x és az y tengelyek mentén!
- (b) Határozza meg az A pontban a \underline{T}_A feszültségi tenzor mátrixát és szemléltesse azt az A pont környezetéből kivett elemi kockán!
- (c) Írja fel a zérusvonal egyenletét, továbbá keresse meg a zérusvonal és az x tengely által bezárt φ szöget!
- (d) Adja meg a veszélyes pontokat és ezekben a pontokban számítsa ki a σ_z^{\max} feszültség értékét!

Megoldás: $\sigma'_z = 1,41y$ [$\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$], $\sigma''_z = -4,5x$ [$\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$], $[\underline{T}]_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16,8 \end{bmatrix}$ [MPa],
 $y = 3,2x$, $\varphi = 72,646^\circ$, VP: B és C , $\sigma_z^{\max} = 73,2$ [MPa].

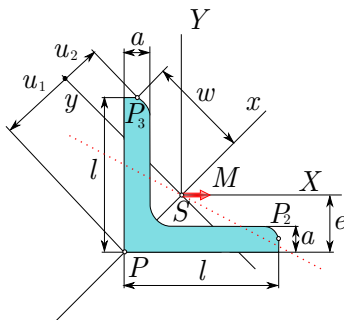
- 40 Az L80.80.10 szelvényű szögacélból készült rúd K KM-ét ismert $\vec{M} = M\vec{e}_x$ nyomaték hajlításra terheli.

(MPt.II. 5.12 alapján)

TÁBLÁZATBÓL:

$l = 80$ [mm], $a = 10$ [mm], $e = 23,4$ [mm],
 $u_1 = 33,1$ [mm], $u_2 = 28,5$ [mm], $w = 56,6$ [mm],
 $I_x = 139 \cdot 10^4$ [mm⁴], $I_y = 35,9 \cdot 10^4$ [mm⁴],

$M = 0,35$ [kNm].

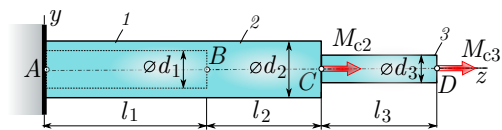


- (a) Határozza meg a KM P pontjában a σ_z feszültséget!
- (b) Írja fel főtengelyek-koordináta rendszerében a zérusvonal egyenletét!
- (c) Számítsa ki a σ_z^{\max} értékét!

Megoldás: $M_{hx} = M_{hy} = 247,49$ [Nm], $\sigma_z(P) = -22,81$ [MPa], $y = -3,87x$, $\sigma_z^{\max} = \sigma_z(P_3) = 29,71$ [MPa].

- 41) Az ábrán vázolt baloldali végén befogott tartó acélból készült. A tengely befogott végénél d_1 átmérőjű furat van, melynek mélysége l_1 . A tengelyt az ábrán vázolt csavarónyomatékok terhelik és feltételezzük, hogy minden tengelyszakasz igénybevétele tiszta csavarás.

(Fsz. 119.o 4.6 alapján)



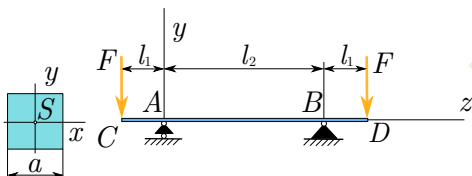
$$d_1 = 46 \text{ [mm]}, l_1 = 0,6 \text{ [m]}, d_2 = 60 \text{ [mm]}, \\ l_2 = 0,4 \text{ [m]}, d_3 = 30 \text{ [mm]}, l_3 = 0,4 \text{ [m]}, \\ M_{c2} = 2400 \text{ [Nm]}, M_{c3} = 360 \text{ [Nm]}, G = 80 \text{ [GPa]}.$$

- (a) Határozza meg a D KM A -hoz képesti szögelfordulását!

Megoldás: $\phi_{AD} = 0,05832 \text{ [rad]}$.

- 42) Négyzet keresztmetszetű prizmatikus tartót a konzol végeken, az ábrán látható módon, egyenlő F erők terhelnek.

(MPt.II. 4.66 alapján)



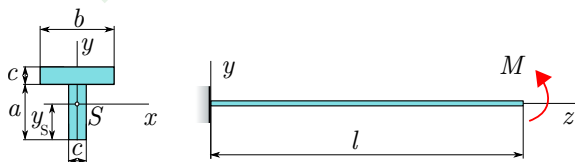
$$F = 1,2 \text{ [kN]}, \sigma_{jell} = 270 \text{ [MPa]}, n = 3, a = 20 \text{ [mm]}, \\ E = 200 \text{ [GPa]}, l_1 = 0,1 \text{ [m]}, l_2 = 0,4 \text{ [m]}.$$

- (a) Ellenőrizze a tartót!
 (b) Számítsa ki a rúd súlyvonalának görbületi sugarát!
 (c) Határozza meg a rúd B KM-nek szögelfordulását!

Megoldás: megfelel ($\sigma_z^{\max} = 90 \text{ [MPa]}$), $\rho = 22,2 \text{ [m]}$, $\phi_B = 0,009 \text{ [rad]}$.

- 43) Az ábrán vázolt **T** szelvényű rúd Al-ból készült, $E = 70 \text{ [GPa]}$. A rúd igénybevétele tiszta hajlítás.
 $a = 90 \text{ [mm]}$; $b = 120 \text{ [mm]}$; $c = 30 \text{ [mm]}$; $l = 1,8 \text{ [m]}$; $y_S = 79,286 \text{ [mm]}$; $M = 5 \text{ [kNm]}$.

(MPt.II. 5.10 alapján)

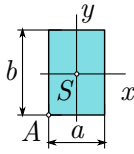


- (a) Határozza meg a szelvényben ébredő legnagyobb húzó és nyomófeszültséget!
 (b) Számítsa ki a rúd görbületi sugarát!
 (c) Adja meg a rúdban felhalmozódott alakváltozási energiát!

Megoldás: $\sigma_z^{\max} = 51,84 \text{ [MPa]}$; $\sigma_z^{\min} = -26,62 \text{ [MPa]}$; $\rho_y = 107,058 \text{ [m]}$; $U = 42,03 \text{ [J]}$.

- 44 Adott az alábbi téglalap KM.

(MPt.II. 4.24 alapján)

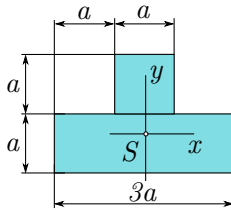


- (a) Vezesse le az x és y tengelyre vonatkozó I_x és I_y másodrendű nyomatékokat, valamint az $x - y$ tengelypárra vonatkozó I_{xy} másodrendű nyomatékot!
- (b) A Steiner-tétel felhasználásával határozza meg az A ponthoz tartozó $\underline{\underline{I}}_A$ tehetetlenségi tenzor mátrixát!

Megoldás: $I_x = \frac{ab^3}{12}$; $I_y = \frac{a^3b}{12}$; $I_{xy} = 0$; $[\underline{\underline{I}}]_A = \begin{bmatrix} I_x^A & -I_{xy}^A \\ -I_{yx}^A & I_y^A \end{bmatrix}$, $I_x^A = \frac{ab^3}{3}$, $I_y^A = \frac{a^3b}{3}$, $I_{xy}^A = \frac{a^2b^2}{4}$

- 45 Ismert az alábbi KM, továbbá ismert a KM x súlyponti tengelyére számított másodrendű nyomaték.

(MPt.II. 4.45 alapján)



- (a) Mekkora kell választani az „ a ” méretet, hogy az x tengelyre számított másodrendű nyomaték $I_x = 2601,4 \text{ [cm}^4\text{]}$ legyen?

Megoldás: $a = 7 \text{ [cm]}$.

- 46 Prizmatikus rúd l hosszúságú szakaszát M nyomatékú erőpárok hajlításra terhelik. A rúd KM S súlyponti tehetlenségi tenzorának elemei ismertek az xy koordináta-rendszerben.

$M = 0,5 \text{ [kNm]}$; $I_x = 12 \text{ [cm}^4\text{]}$; $I_y = 4 \text{ [cm}^4\text{]}$; $I_{xy} = 3 \text{ [cm}^4\text{]}$

(MPt.II. 5.14 alapján)

- (a) Határozza meg a $z = 0$ KM I_1 és I_2 fő tehetlenségi nyomatékait, és az x tengely 1-es főiránnyal bezárt φ szögének tangensét!



- (b) Számítsa ki a $P(0; 40; 0) \text{ [mm]}$ pontban a σ_z normálfeszültséget!

- (c) Írja fel a zérusvonal egyenletét!

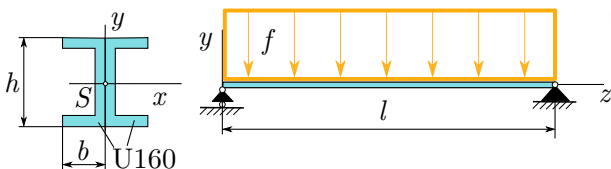
Megoldás: $I_1 = 13 \text{ [cm}^4\text{]}$; $I_2 = 3 \text{ [cm}^4\text{]}$; $\text{tg } \varphi = -\frac{1}{3}$; $\sigma_z = 205,128 \text{ [MPa]}$; $y = 0,75x$.

- 47 Ismeretes az állandó KM-ű kéttámaszú tartó terhelése.

$l = 6 \text{ [m]}$; $f = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$; TÁBLÁZATBÓL: U160 $K_x = 116 \text{ [cm}^3\text{]}$; $h = 160 \text{ [mm]}$; $b = 65 \text{ [mm]}$

(MPt.II. 4.57 alapján)

- (a) Az igénybevételi ábrák megrajzolása után határozza meg a tartó veszélyes KM-ét!



- (b) Számítsa ki a σ_z^{max} normálfeszültség értékét, továbbá a tartó maximális feszültségű P pontjának, illetve P pontjainak x, y, z koordinátáit!

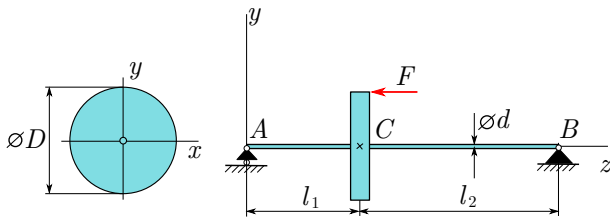
- (c) Ellenőrizzük a tartót feszültségcsúcsra, ha a tartó anyagra $\sigma_{\text{meg}} = 150 \text{ [MPa]}$!

Megoldás: v. KM: $z = 3 \text{ [m]}$; $\sigma_z^{\text{max}} = 96,98 \text{ [MPa]}$; $P(x; \pm 80; 3000) \text{ [mm]}$; MEGFELEL.

- 48 Kéttámaszú tartónak tekinthető kör KM-ű tengelyre ékelt tárcsa kerületén tengelyirányú F erő hat.

$$D = 300 \text{ [mm]}; l_1 = 200 \text{ [mm]}; l_2 = 400 \text{ [mm]}; F = 5 \text{ [kN]}; E = 200 \text{ [GPa]}; \sigma_{\text{meg}} = 130 \text{ [MPa]}$$

(MPt.II. 5.6 alapján)

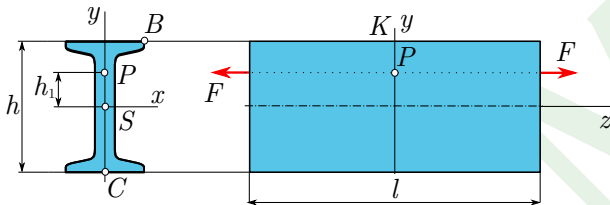


- (a) Megrajzolva az igénybevételi ábrákat, adja meg a veszélyes KM-et és azon jelölje be a veszélyes ponto(k)a)t!
- (b) Méretezze az AB tengelyt (a nyírás elhanyagolásával)!
- (c) Határozza meg a tartóban felhalmozódó U belső energia értékét!

Megoldás: v. KM: C^+ ; v.p.: $P(0; d/2; 200)$ [mm]; $d = 35$ [mm]; $U = 1,3952$ [J].

- 49 Az l hosszúságú szabványos **I240** szelvényű rudat F erők terhelik. Az erők hatásvonala a P ponton átmegey.

(MPt.II. 5.19 alapján)



$$F = 320 \text{ [kN]}; h_1 = 60 \text{ [mm]}; l = 3 \text{ [m]};$$

TÁBLÁZATBÓL:

$$h = 240 \text{ [mm]}; A = 46,1 \text{ [cm}^2\text{]};$$

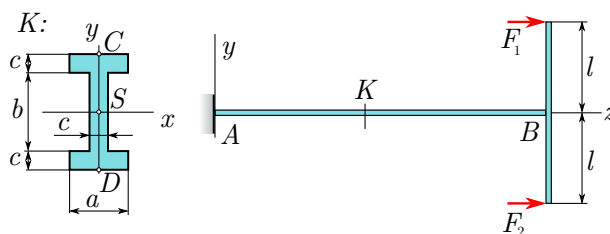
$$I_x = 4,248 \cdot 10^3 \text{ [cm}^4\text{]}; K_x = 354 \text{ [cm}^3\text{]}$$

- (a) Mi a rúd igénybevétele?
- (b) Határozza meg a rúd K ($z = 0$) KM-ben a σ_z normál feszültség eloszlását, mint az y koordináta függvényét!
- (c) Számítsa ki a σ_z feszültséget a K KM B , C és S pontjaiban!
- (d) Állapítsa meg a veszélyes pont(ok) helyét!
- (e) Értelmezhető-e a KM pontjaiban a zérusvonal?

Megoldás: húzás+hajlítás; $\sigma_z(y) = 69,41 \text{ [MPa]} + 0,4519y \text{ [MPa/mm]}$; $\sigma_z^B = 123,64 \text{ [MPa]}$; $\sigma_z^C = 15,17 \text{ [MPa]}$; $\sigma_z^S = 69,41 \text{ [MPa]}$; v.p.: $y = 120$ [mm]; NEM ($y = -153,59$ [mm]).

- 50 Ismert a rúd AB szakaszának KM-e. A rudat az alábbi ábra szerint F_1 és F_2 erők terhelik.

(MPt.II. 5.9 alapján)



$$F_1 = 80 \text{ [kN]}; F_2 = 120 \text{ [kN]};$$

$$l = 250 \text{ [mm]};$$

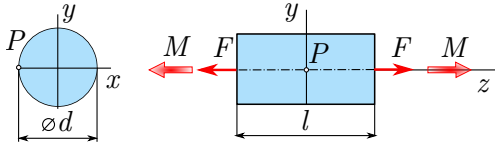
$$a = 60 \text{ [mm]}; b = 80 \text{ [mm]}; c = 20 \text{ [mm]};$$

- (a) Határozza meg a K KM-ben ébredő feszültségek eloszlását az y tengely mentén!
- (b) Számítsa ki a K KM-ben a C , D és az S pontokban a feszültséget!
- (c) Ellenőrizze a tartó AB szakaszát a Mohr-féle elmélet szerint, ha a tartóra megengedett feszültség $\sigma_{\text{meg}} = 100$ [MPa]!

Megoldás: $\sigma_z = 50 \text{ [MPa]} - 1,44y \text{ [MPa/mm]}$; $\sigma_z^C = -36,4 \text{ [MPa]}$; $\sigma_z^D = 136,4 \text{ [MPa]}$; $\sigma_z^S = 50 \text{ [MPa]}$; NEM FELEL MEG.

- 51 Adott, az alábbi ábra szerint, a kör KM-ű l hosszúságú prizmatikus rúd terhelése.

(MPt.II. 5.29 alapján)



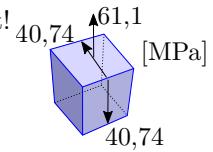
$$F = 120 \text{ [kN]}; M = 1000 \text{ [Nm]}; l = 500 \text{ [mm]};$$

$$d = 50 \text{ [mm]}; G = 80 \text{ [GPa]}; \nu = 0,3,$$

$$\sigma_{\text{meg}} = 120 \text{ [MPa]};$$

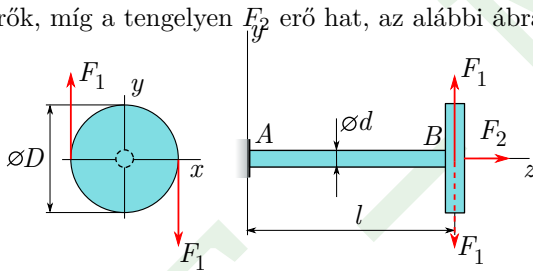
- Adja meg a rúd igénybevételét!
- Határozza meg a ($z = 0$) KM-ben a normál és a nyírófeszültségek eloszlását az x illetve az y tengely mentén!
- Számítsa ki a P pontban a feszültségi és az alakváltozási tenzorok mátrixainak zérustól különböző elemeit és írja fel a mátrixokat az xyz KR-ben!
- Szemléltesse a P pont környezetéből kivett elemi kockán a feszültségi állapotot!
- Ellenőrizzük a rudat a Mohr-féle elmélet szerint!

Megoldás: $\sigma_z = 61,1 \text{ [MPa]}; \tau_{\varphi z} = 1,6297R \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \right]; \tau_{xz}^P = 0; \tau_{yz}^P = -40,74 \text{ [MPa]};$
 $\varepsilon_z^P = 2,94 \cdot 10^{-4} [-]; \varepsilon_x = \varepsilon_y = -8,81 \cdot 10^{-5} [-]; \gamma_{xz} = 0; \gamma_{yz} = -5,1 \cdot 10^{-4};$ MEGFELEL.



- 52 A kör KM-ű d átmérőjű, egyik végén befogott rúd másik végére ékelt D átmérőjű tárcsa kerületén F_1 erők, míg a tengelyen F_2 erő hat, az alábbi ábra szerint.

(MPt.II. 5.31 alapján)



$$F_1 = 5 \text{ [kN]}; F_2 = 20 \text{ [kN]};$$

$$\sigma_{\text{jell}} = 180 \text{ [MPa]}; n = 1,5;$$

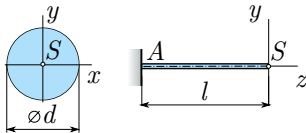
$$D = 1200 \text{ [mm]}; d = 80 \text{ [mm]}; l = 1,8 \text{ [m]}$$

- Állapítsa meg a rúd AB szakaszának igénybevételét, megrajzolva az igénybevételi ábrákat is!
- Ellenőrizzük a rudat a Mohr-féle elmélet szerint!
- Ha csőre kívánjuk cserélni az AB rudat, megtartva a külső d méretet, akkor mekkora lehet a cső belső d_1 átmérője, hogy a HMH-féle elmélet alapján még megfeleljen?

Megoldás: húzás+csavarás; MEGFELEL ($\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = 119,43 \text{ [MPa]}; d_1 = 45 \text{ [mm]}$).

- 53 A kör KM-ű prizmatikus rúd K KM-ének igénybevétele a súlypontba redukált $(\vec{F}; \vec{M}_S)_S$ redukált vektorkettőssel adott.

(MPt.II. 5.33 alapján)



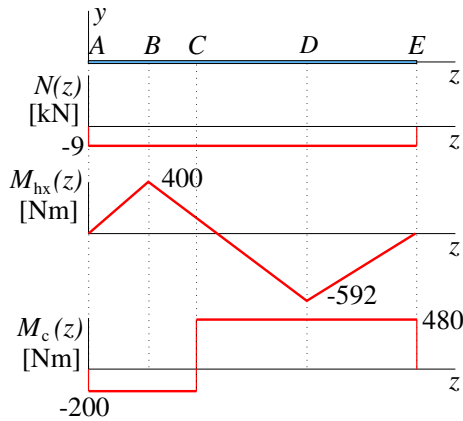
$$\vec{F} = \vec{0}; \vec{M}_S = (-100\vec{e}_x + 150\vec{e}_z) \text{ [Nm]};$$

$$d = 50 \text{ [mm]}; E = 200 \text{ [GPa]}; l = 1,2 \text{ [m]}$$

- Határozza meg az x és y tengelyek mentén a normál és a nyírófeszültségek eloszlásának függvényét!
- Adja meg a $z = 0$ KM veszélyes pontjait!
- Írja fel a $z = 0$ KM $B(25; 0; 0)$ [mm] pontjában a $[\underline{T}]_B$ feszültségi tenzor mátrixát!
- Mekkora a tartó semleges szálának ρ_y görbületi sugara?

Megoldás: $\sigma_z = -0,33y \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \right]; \tau_{\varphi z} = 0,24R \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \right];$ v.p.: $A_1(0; 25; 0)$ [mm] és $A_2(0; -25; 0)$ [mm];
 $\tau_{yz}^B = \tau_{zy}^B = 6,1 \text{ [MPa]}; \rho_y = 613,59 \text{ [m]}$.

- 54 Ismeretesek a körgyűrű KM-ű prizmatikus rúd AE szakaszának igénybevételi ábrái. A tartó anyagára megengedett feszültség σ_{meg} . Adott a rúd keresztmetszetének A területe és K_x az x tengelyre számított keresztmetszeti tényező.



(MPt.II. 5.49 alapján)

$$A = 15 [\text{cm}^2]; K_x = 8 [\text{cm}^3];$$

$$\sigma_{\text{meg}} = 100 [\text{MPa}]$$

- (a) Ellenőrizze a rudat a Mohr-féle elmélet alapján!

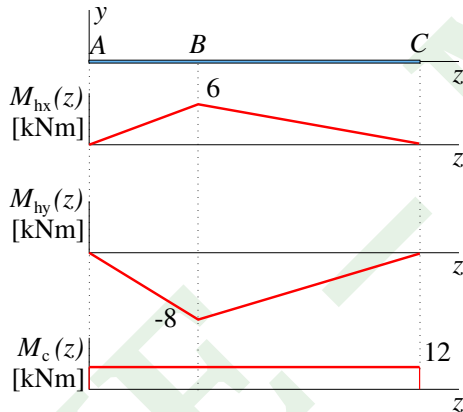
Megoldás: nyomás+hajlítás+csavarás;

v. KM: D ; v.p.: $P(0; \frac{D}{2}; z_D)$ pont;

MEGFELEL ($\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = 100 [\text{MPa}]$).

- 55 Ismertek a d átmérőjű kör KM-ű AC prizmatikus rúd igénybevételi ábrái.

(MPt.II. 5.39 alapján)



$$\sigma_{\text{jell}} = 300 [\text{MPa}]; n = 2, 5$$

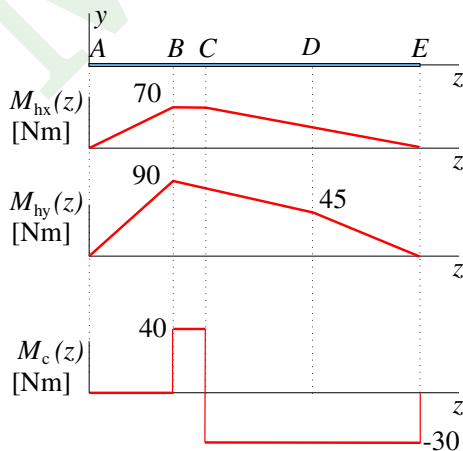
- (a) Határozza meg a rúd veszélyes KM-ét!
 (b) Méretezze a rudat feszültségcsúcsra a Mohr-féle elmélet alapján!

Megoldás: hajlítás+csavarás;

v. KM: B ; v.p.: két kerületi pont; $d = 110 [\text{mm}]$.

- 56 Ismertek az állandó d átmérőjű kör KM-ű AE tengely igénybevételi ábrái.

(MPt.II. 5.40 alapján)



$$\sigma_{\text{meg}} = 180 [\text{MPa}]$$

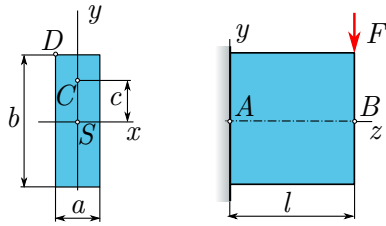
- (a) Határozza meg a rúd veszélyes KM-ét!
 (b) Méretezze a rudat feszültségcsúcsra a HMM-féle elmélet alapján!

Megoldás: hajlítás+csavarás;

v. KM: B^+ ; v.p.: két kerületi pont; $d = 19 [\text{mm}]$.

57 A téglalap KM-ű, egyik végén befogott prizmatikus rudat F erő terheli.

(MPt.II. 5.42 alapján)



$a = 20$ [mm]; $b = 60$ [mm]; $c = 20$ [mm]; $l = 50$ [mm];
 $\sigma_{\text{jell}} = 180$ [MPa]; $n = 1,5$; $F = 30$ [kN]

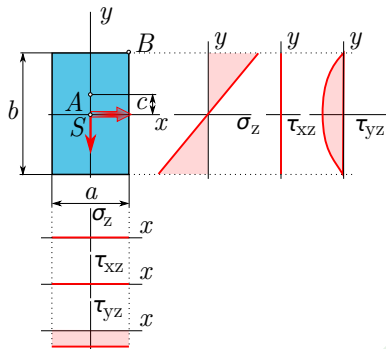
- (a) Határozza meg a veszélyes KM S , C és D pontjában a feszültségeket!
- (b) Ellenőrizze a rudat, hogy a Mohr-féle elmélet szerint megfelel-e!

Megoldás: hajlítás+nyírás;

v. KM: A ; $\sigma_z^S = 0$; $\sigma_z^C = 83,3$ [MPa]; $\sigma_z^D = 125$ [MPa]; $\tau_{yz}^S = -37,5$ [MPa]; $\tau_{yz}^C = -20,83$ [MPa]; $\tau_{yz}^D = 0$;
 NEM FELEL MEG ($\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = 125$ [MPa]).

58 A téglalap KM-ű prizmatikus rúd K KM-ének igénybevétele az S súlypontba redukált $(\vec{F}, \vec{M}_S)_S$ eredő vektorkettőssel adott.

(MPt.II. 5.41 alapján)



$\vec{F} = -24\vec{e}_y$ [kN]; $\vec{M}_S = 0,72\vec{e}_x$ [kNm];
 $a = 40$ [mm]; $b = 60$ [mm]; $c = 10$ [mm];

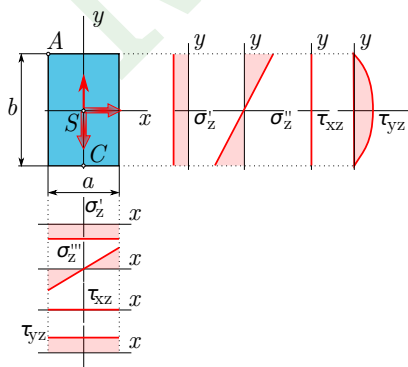
- (a) Rajzolja meg az x és y tengelyek mentén a σ_z normál-feszültség, valamint a τ_{xz} és a τ_{yz} nyírófeszültségek eloszlási diagramjait!
- (b) Határozza meg a KM S , A és B pontjaiban a feszültségeket!
- (c) Számítsa ki a Mohr-féle elmélet szerint a σ_{red} feszültséget az A , B és S pontokban!

Megoldás: hajlítás+nyírás;

$\sigma_z(y) = y \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \right]$; $\tau_{yz}(y) = \frac{1}{60} y^2 \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}^2} \right] - 15$ [MPa]; $\tau_{yz}^{\text{max}} = 15$ [MPa]; $\sigma_z^S = 0$; $\sigma_z^A = 10$ [MPa]; $\sigma_z^B = 30$ [MPa];
 $\tau_{yz}^S = -15$ [MPa]; $\tau_{yz}^A = -13,3$ [MPa]; $\tau_{yz}^B = 0$; $\sigma_{\text{red}}^S = 30$ [MPa]; $\sigma_{\text{red}}^A = 28,48$ [MPa]; $\sigma_{\text{red}}^B = 30$ [MPa].

59 A téglalap KM-ű prizmatikus rúd K KM-ének igénybevétele az S súlypontba redukált $(\vec{F}, \vec{M}_S)_S$ eredő vektorkettőssel adott.

(MPt.II. 5.47 alapján)



$\vec{F} = (8\vec{e}_y - 4\vec{e}_z)$ [kN]; $\vec{M}_S = (0,16\vec{e}_x - 0,08\vec{e}_y)$ [kNm];
 $a = 20$ [mm]; $b = 40$ [mm];

- (a) Adja meg a KM igénybevételeit!
- (b) Rajzolja meg az x és y tengelyek mentén a σ_z normál-feszültség, valamint a τ_{xz} és a τ_{yz} nyírófeszültségek eloszlási diagramjait!
- (c) Határozza meg a KM S , A és C pontjaiban a $[\underline{T}]$ -t!
- (d) Azonosítsa a KM veszélyes pontját, majd ott számítsa ki a $\sigma_{\text{red}}^{\text{max}}$ feszültséget!

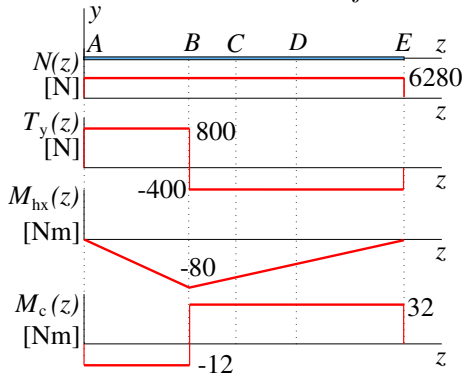
Megoldás: nyomás+hajlítás+nyírás;

$N = -4$ [kN] $\rightarrow \sigma_z' = -5$ [MPa]; $T_y = -8$ [kN] $\rightarrow \tau_{yz} = 15$ [MPa] $- 37,5 \cdot 10^{-3} y^2 \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}^2} \right]$; $M_{hx} = 0,16$ [kNm] $\rightarrow \sigma_z'' = 1,5y \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \right]$;
 $M_{hy} = 0,08$ [kNm] $\rightarrow \sigma_z''' = 3x \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}} \right]$; v.p.: $P(-10; -20)$ [mm] $\rightarrow \sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = 65$ [MPa];

$[\underline{T}]_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 15 & -5 \end{bmatrix}$; $[\underline{T}]_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; $[\underline{T}]_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}$.

60) Ismertek az állandó d átmérőjű kör KM-ű AE tengely igénybevételi ábrái.

(MPt.II. 5.52 alapján)



$d = 20$ [mm]; $\sigma_{meg} = 150$ [MPa]

(a) Ellenőrizze a rudat a Mohr-féle elmélet alapján, ha a rúd anyagának megengedett feszültsége σ_{meg} !

Megoldás: húzás+(nyírás+)hajlítás+csavarás;

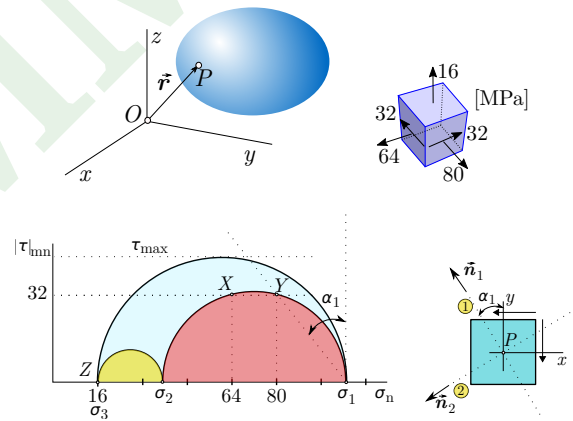
v. KM: B^+ ; v.p.: $P(0; \frac{d}{2}; z_B)$; MEGFELEL ($\sigma_{red}^{max} = 128,52$ [MPa]).

61) Ismertek egy P pontban az xyz tengelyekre merőleges elemi síkokon a feszültségvektorok.

(MPt.II. 3.19 alapján)

$[\vec{p}_x]^T = [64 \quad -32 \quad 0]$ [MPa]; $[\vec{p}_y]^T = [-32 \quad 80 \quad 0]$ [MPa]; $[\vec{p}_z]^T = [0 \quad 0 \quad 16]$ [MPa];

- (a) Szemléltesse a P pontbeli feszültségi állapotot a P környezetéből kivett elemi kockán!
- (b) Írja fel a feszültségi tenzor mátrixát a P pontban!
- (c) Ábrázolja a P pontbeli feszültségi állapotot a Mohr-féle feszültségi kördiagram segítségével!
- (d) Írja fel a főfeszültségeket, és adja meg a P pontbeli feszültségi főirányokat ábrán is szemléltetve!
- (e) Számítsa a ki a P pontban ébredő maximális nyírófeszültséget!
- (f) Hasonlítsa össze a Mohr és a HMH-elmélet alapján számított σ_{red} feszültségeket!



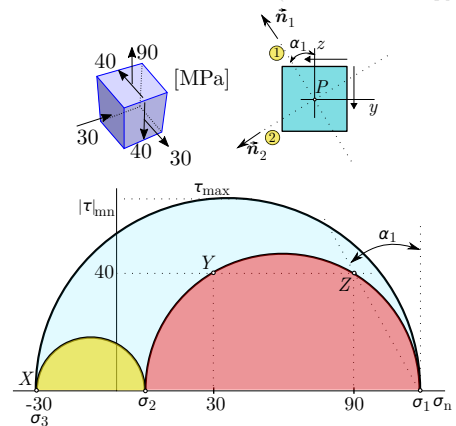
Megoldás: $[\underline{T}]_P = \begin{bmatrix} 64 & -32 & 0 \\ -32 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ [MPa]; $\sigma_1 = 104,98$ [MPa]; $\sigma_2 = 39,01$ [MPa]; $\sigma_3 = 16$ [MPa]; $\alpha_1 = 37,98^\circ$

$\vec{n}_1 = -\sin \alpha_1 \vec{e}_x + \cos \alpha_1 \vec{e}_y$; $\vec{n}_2 = -\cos \alpha_1 \vec{e}_x - \sin \alpha_1 \vec{e}_y$; $\tau_{mn}^{max} = 44,49$ [MPa]; $\sigma_{red}^{Mohr} = 89$ [MPa]; $\sigma_{red}^{HMH} = 80,01$ [MPa].

62) A P pontban keletkező feszültségi állapot a pont környezetéből kivett elemi kockán adott.

(MPt.II. 3.21 alapján)

- (a) Írja fel a P pontbeli feszültségi tenzor mátrixát az xyz KR-ben!
- (b) Rajzolja fel a Mohr-féle feszültségi kördiagramot!
- (c) A feszültségi kördiagram segítségével határozza meg a feszültségi főtengelyeket és számítsa ki a főfeszültségeket!
- (d) Adja meg a P pontban ébredő maximális nyírófeszültséget!
- (e) Hasonlítsa össze a Mohr és a HMH-elmélet alapján számított σ_{red} feszültségeket!



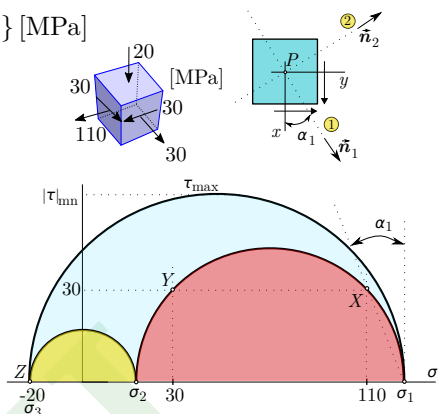
Megoldás: $[\underline{T}]_P = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix}$ [MPa]; $\sigma_1 = 110$ [MPa]; $\sigma_2 = 10$ [MPa]; $\sigma_3 = -30$ [MPa]; $\alpha_1 = 26,56^\circ$

$\vec{n}_1 = -\sin \alpha_1 \vec{e}_y + \cos \alpha_1 \vec{e}_z$; $\vec{n}_2 = -\cos \alpha_1 \vec{e}_y - \sin \alpha_1 \vec{e}_z$; $\tau_{mn}^{max} = 70$ [MPa]; $\sigma_{red}^{Mohr} = 140$ [MPa]; $\sigma_{red}^{HMH} = 124,9$ [MPa].

- 63) Ismert a test P pontjában a \underline{T}_P feszültségi tenzor diadikus alakja az xyz KR-ben. (MPt.II. 3.22 alapján)

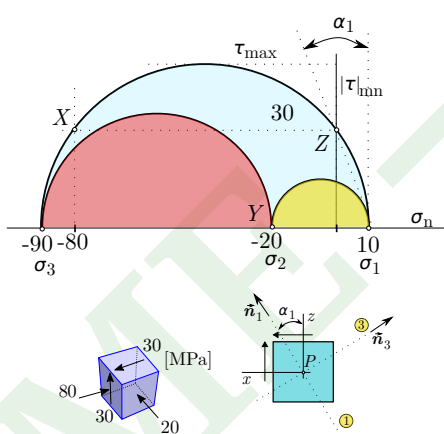
$$\underline{T}_P = \{(110\vec{e}_x + 30\vec{e}_y) \circ \vec{e}_x + (30\vec{e}_x + 30\vec{e}_y) \circ \vec{e}_y + (-20\vec{e}_z) \circ \vec{e}_z\} [\text{MPa}]$$

- (a) Írja fel a P pontbeli feszültségi tenzor mátrixát az xyz KR-ben és szemléltesse azt a P pont környezetéből kivett elemi kockán!
- (b) Rajzolja fel a Mohr-féle feszültségi kördiagramot!
- (c) A feszültségi kördiagram segítségével határozza meg a főfeszültségeket!
- (d) Számítsa ki az 1-es főtengely és az x tengely által bezárt α_1 szög tangensét, és az elemi kockán tüntesse fel a főirányokat!



Megoldás: $[\underline{T}]_P = \begin{bmatrix} 110 & 30 & 0 \\ 30 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$ [MPa]; $\sigma_1 = 120$ [MPa]; $\sigma_2 = 20$ [MPa]; $\sigma_3 = -20$ [MPa]; $\alpha_1 = 18,43^\circ$
 $\vec{n}_1 = \cos \alpha_1 \vec{e}_x + \sin \alpha_1 \vec{e}_y$; $\vec{n}_2 = -\sin \alpha_1 \vec{e}_x + \cos \alpha_1 \vec{e}_y$; $\tau_{mn}^{\max} = 70$ [MPa];

- 64) Ismeretes valamely test P pontjában a feszültségi állapot Mohr-féle kördiagramja, valamint az xyz koordinátatengelyeknek megfelelő X , Y és Z pontok. (MPt.II. 3.24 alapján)



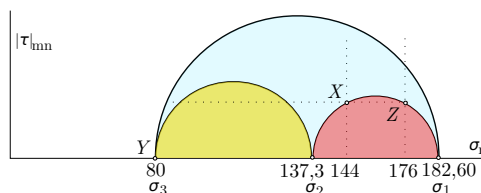
- (a) Határozza meg a \underline{T}_P feszültségi tenzor mátrixát, feltételezve, hogy a mátrixban szereplő valamennyi nyírőfeszültség előjele pozitív!
- (b) Szemléltesse a feszültségi állapotot P pontban!
- (c) Határozza meg a főtengelyeket és szemléltesse azokat az elemi kockán!
- (d) Olvassa le a legnagyobb nyírőfeszültség értékét a P pontban!

Megoldás: $[\underline{T}]_P = \begin{bmatrix} -80 & 0 & 30 \\ 0 & -20 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ [MPa]; $\alpha_1 = 18,43^\circ$
 $\vec{n}_1 = \sin \alpha_1 \vec{e}_x + \cos \alpha_1 \vec{e}_z$; $\vec{n}_3 = -\cos \alpha_1 \vec{e}_x + \sin \alpha_1 \vec{e}_z$; $\tau_{mn}^{\max} = 50$ [MPa];

- 65) Adott valamely test P pontjában a \underline{T}_P feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR-ben, valamint a G csúsztató rugalmassági tényező és a Poisson-szám. (MPt.II. 3.36 alapján)

$$[\underline{T}]_P = \begin{bmatrix} 144 & 0 & 16 \\ 0 & 80 & 0 \\ 16 & 0 & 176 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad G = 80 [\text{GPa}] \quad \nu = 0,25$$

- (a) Rugalmas alakváltozást feltételezve, határozza meg a P pontbeli \underline{A}_P alakváltozási tenzor mátrixának 0-tól különböző elemeit!
- (b) Rajzolja meg a Mohr-féle feszültségi kördiagramot!

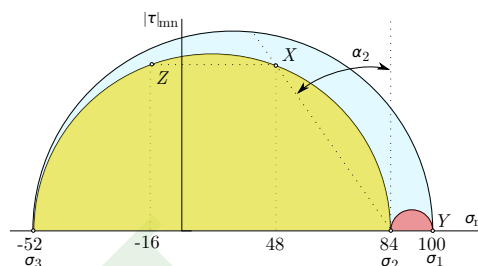
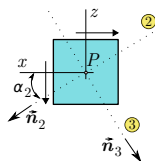


Megoldás: $\varepsilon_x = 0,4 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_z = 0,6 \cdot 10^{-3}$; $\frac{1}{2} \gamma_{xz} = 0,1 \cdot 10^{-3}$.

- 66) Ismeretes a vizsgálat tárgyát képező test valamely P pontjában a feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR-ben.

(F.sz.201/6.5. alapján)

$$[\underline{T}]_P = \begin{bmatrix} 48 & 0 & -60 \\ 0 & 100 & 0 \\ -60 & 0 & -16 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

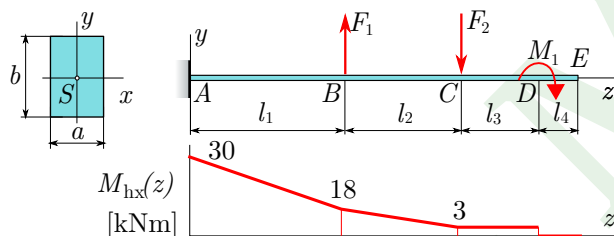


- (a) Határozza meg a Mohr-féle feszültségi kördiagram segítségével a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat!

Megoldás: $\sigma_1 = 100$ [MPa], $\sigma_2 = -52$ [MPa]; $\sigma_3 = -16$ [MPa]; $\alpha_2 = 30,96^\circ$;
 $\vec{n}_2 = \cos \alpha_2 \vec{e}_x - \sin \alpha_2 \vec{e}_z$; $\vec{n}_3 = -\sin \alpha_2 \vec{e}_x - \cos \alpha_2 \vec{e}_z$.

- 67) Az állandó KM-ű, ismert terhelésű tartó, kijelölt alakváltozási jellemzőit keressük a hajlításból származó energia figyelembevételével.

(MPt.II. 7.42 alapján)



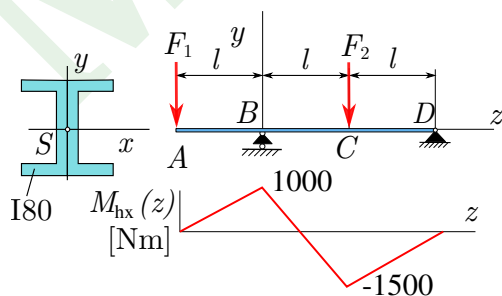
$a = 60$ [mm], $b = 150$ [mm], $l_1 = 4$ [m], $l_2 = 3$ [m],
 $l_3 = 2$ [m], $l_4 = 1$ [m], $F_1 = 2$ [kN], $F_2 = 5$ [kN],
 $M_1 = 3$ [kNm], $E = 210$ [GPa]

- (a) Határozza meg az A ponti támasztó ER-t!
 (b) Rajzolja fel a tényleges terheléshez az $M_{hx}(z)$ hajlítónyomatéki ábrát!
 (c) Számítsa ki a C ponti v_C függőleges elmozdulást, és a D ponti KM ϕ_{Dx} szögelfordulását felhasználva a szükséges virtuális erő és nyomatéki terheléseket!

Megoldás: $F_{Ay} = 3$ [kN]; $M_{\alpha A} = 30$ [kNm]; $v_C = 156,47$ [mm](↓); $\phi_{Dx} = 37,6 \cdot 10^{-3}$ [rad](↷).

- 68) Ismert az állandó KM-ű, szabványos I80 szelvényű tartó terhelése.

(MPt.II. 7.43 alapján)



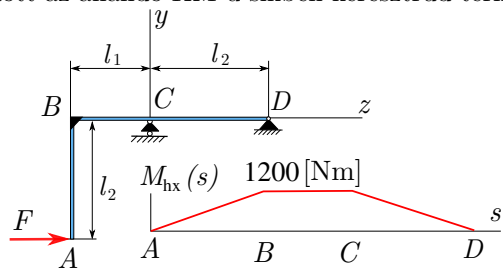
$l = 1$ [m], $F_1 = 1$ [kN], $F_2 = 4$ [kN],
 $I_x = 77,8 \cdot 10^4$ [mm⁴], $E = 210$ [GPa]

- (a) Határozza meg a támasztó ER-t!
 (b) Rajzolja fel a tényleges terheléshez tartozó $M_{hx}(z)$ hajlítónyomatéki ábrát!
 (c) Számítsa ki az A ponti v_A függőleges elmozdulást, és a C ponti KM ϕ_{Cx} szögelfordulását, felhasználva a szükséges virtuális erő és nyomatéki terheléseket!

Megoldás: $F_{By} = 3,5$ [kN]; $F_{Dy} = 1,5$ [kN]; $v_A = 0$ [mm]; $\phi_{Cx} = 0,51 \cdot 10^{-3}$ [rad](↷).

- 69 Adott az állandó KM-ű síkbeli keresztűrd terhelése.

(MPt.II. 7.69 alapján)



$$l_1 = 2 \text{ [m]}, l_2 = 3 \text{ [m]}, F = 400 \text{ [N]}, \\ I_x E = 350 \text{ [kNm}^2\text{]}$$

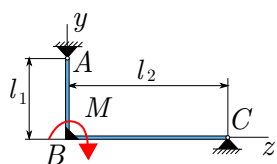
- (a) Határozza meg a támasztó ER-t!
 (b) Rajzolja fel a tényleges terheléshez tartozó $M_{hx}(s)$ hajlítónyomatéki ábrát!

- (c) Számítsa ki az A ponti v_A függőleges és w_A vízszintes elmozdulásokat, felhasználva a szükséges virtuális erő terheléseket!

Megoldás: $\vec{F}_C = 400\vec{e}_y$ [N]; $\vec{F}_D = (-400\vec{e}_y - 400\vec{e}_z)$ [N]; $v_A = 13,7$ [mm](↓); $w_A = 41,14$ [mm](→).

- 70 Adott az ábrán látható statikailag határozatlan törvonalú tartó.

(MPt.II. 8.15 alapján)



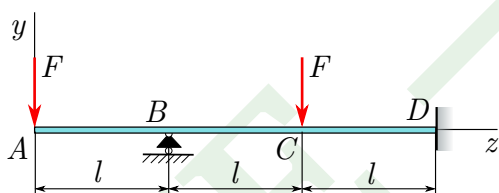
$$l_1 = 2 \text{ [m]}, l_2 = 4 \text{ [m]}, M = 3 \text{ [kNm]}, \\ I_x E = 300 \text{ [kNm}^2\text{]}$$

- (a) Tegye határozottá a tartót úgy, hogy a C ponti F_{Cz} vízszintes támasztóerőt meghatározza!

Megoldás: $F_{Cz} = 1$ [kN](→).

- 71 Ismert az állandó KM-ű, statikailag határozatlan tartó terhelése.

(MPt.II. 8.19 alapján)



$$l = 4 \text{ [m]}, F = 4 \text{ [kN]}, I_x E = 350 \text{ [kNm}^2\text{]}$$

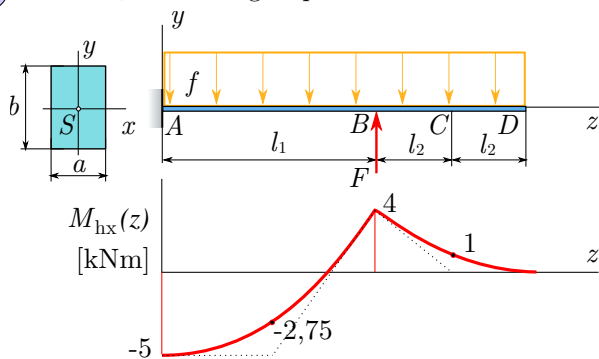
- (a) Tegye statikailag határozottá a tartót úgy, hogy meghatározza a B ponti F_{By} támasztóerőt ($v_B = 0$ feltétellel)!
 (b) Számítsa ki a D ponti támasztó ER-t (a már ismert F_{By} mellett)!

- (c) Határozza meg a C ponti v_C függőleges elmozdulást, felhasználva a szükséges virtuális erő terhelést!

Megoldás: $F_{By} = 8,25$ [kN](↑); $F_D = 0,25$ [kN](↓); $M_{\alpha D} = 2$ [kNm](↷); $v_C = 38$ [mm](↑).

- 72 Adott az állandó téglalap KM-ű tartó terhelése.

(MPt.II. 7.20 alapján)



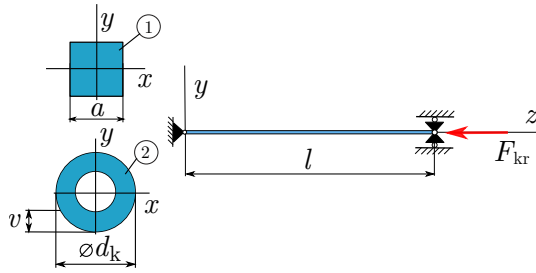
$$a = 60 \text{ [mm]}, b = 100 \text{ [mm]}, l_1 = 3 \text{ [m]}, l_2 = 1 \text{ [m]}, \\ E = 200 \text{ [GPa]}, f = 2 \text{ [kN/m]}, F = 10 \text{ [kN]}$$

- (a) Határozza meg a támasztó ER-t!
 (b) Rajzolja fel a tényleges terheléshez tartozó $M_{hx}(z)$ hajlítónyomatéki ábrát!
 (c) Számítsa ki a D ponti v_D függőleges elmozdulást és a KM ϕ_{Dx} szögelfordulását, felhasználva a szükséges virtuális erő és nyomatéki terheléseket!

Megoldás: $M_{\alpha A} = 5$ [kNm](↷); $v_D = 23,75$ [mm](↑); $\phi_{Dx} = 3,3 \cdot 10^{-3}$ [rad](↷).

- 73) Az l hosszúságú állandó KM-ű rudat mindkét végén gömbcsuklóval támasztjuk meg. A rúd KM-e két változatban adott: egy a oldalú négyzet keresztmetszet, illetve egy d_k külső átmérőjű, v falvastagságú cső. A rúd anyagának folyáshatára σ_F , rugalmassági határa σ_E .

(MPt.II. 6.1 alapján)



$$a = 40 \text{ [mm]}, d_k = 60 \text{ [mm]}, v = 3 \text{ [mm]},$$

$$\sigma_F = 300 \text{ [MPa]}, \sigma_E = 200 \text{ [MPa]},$$

$$E = 200 \text{ [GPa]}, l = 2 \text{ [m]}$$

- (a) Határozza meg a λ_E határkarcsúsági tényezőt, majd vázolja a λ karcsúsági tényező függvényében a $\sigma_{kr}(\lambda)$ kritikus feszültséget!

- (b) Mindkét KM esetében számítsa ki a konkrét λ karcsúsági tényezőt!
 (c) Mindkét KM-re adja meg a σ_{kr} kritikus feszültséget!
 (d) Mekkora a két KM-re az F_{kr} kritikus nyomóerő, amely már kihajlást okoz?

Megoldás: $\lambda_E = 99,35 [-]$; $\lambda_1 = 173,3 [-]$; $\lambda_2 = 99,1 [-]$; $\sigma_{kr1} = 65,69 \text{ [MPa]}$; $\sigma_{kr2} = 200,24 \text{ [MPa]}$;
 $F_{kr1} = 105,1 \text{ [kN]}$; $F_{kr2} = 107,57 \text{ [kN]}$;

(MPt.II. 6.2 alapján)

- 74) Az l hosszúságú rúd felső vége szabad, alsó vége befogott. A rúd anyagának folyáshatára σ_F , rugalmassági határa σ_E .

$$l = 2 \text{ [m]}, \sigma_F = 300 \text{ [MPa]}, \sigma_E = 200 \text{ [MPa]}, E = 200 \text{ [GPa]}$$

TÁBLÁZATBÓL: (U50)

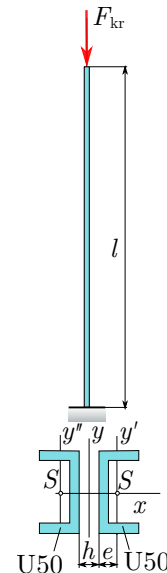
$$A = 710 \text{ [mm}^2\text{]}, I_x = 26 \cdot 10^4 \text{ [mm}^4\text{]}, I_y = 9,1 \cdot 10^4 \text{ [mm}^4\text{]},$$

$$e = 13,7 \text{ [mm]}$$

- (a) Mekkora h távolság esetén következik be a kihajlás a rúd mindkét fősfkjában azonos kritikus erő mellett, ha a rúd KM-e: 2xU50?
 (b) Határozza meg a λ_E határkarcsúsági tényezőt!
 (c) Rugalmas kihajlás következik-e be az adott geometriai viszonyok esetén?
 (d) Számítsa ki ekkor az F_{kr} kritikus erőt!

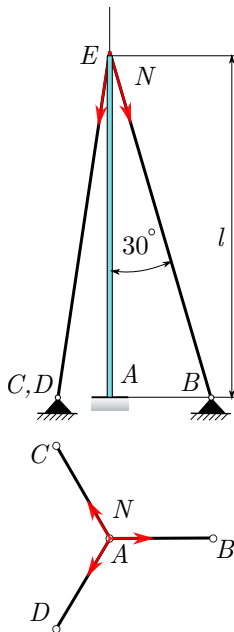
Megoldás:

$$h = 3,45 \text{ [mm]}; \lambda_E = 99,35 [-]; \text{igen } (\lambda = 209,03 [-]); F_{kr} = 64,15 \text{ [kN]}.$$



- 75 Egy l magasságú antennatartó oszlopot három szimmetrikus elrendezésű kötéllel rögzítünk.

(MPt.II. 6.4 alapján)



Alsó vége befogott, felső végéről feltételezzük, hogy vízszintes irányban nem mozdul el. A rúd anyagának folyáshatára σ_F , rugalmassági határa σ_E .

Az oszlop d_k külső átmérőjű, v vastagságú cső KM-ű.

$$l = 10 \text{ [m]}, d_k = 40 \text{ [mm]}, v = 2,5 \text{ [mm]}, n = 2, E = 200 \text{ [GPa]}, \sigma_F = 300 \text{ [MPa]}, \sigma_E = 200 \text{ [MPa]}$$

- (a) Határozzuk meg az F_{kr} kritikus nyomóerőt!
 (b) Mekkora N erővel szabad a köteleket megfeszíteni, hogy az oszlop az előírt n biztonsági tényező mellett kihajlásra megfeleljen?

Megoldás: $F_{kr} = 2\,095 \text{ [N]}$; $N = 403 \text{ [N]}$.

- 76 A csavarsajtoló menetes csavarorsóját közelítésként d átmérőjű, l hosszúságú mindkét végén befogott, nyomott hengeres rúdként modellezzük. A rúd anyagának folyáshatára σ_F , rugalmassági határa σ_E .

(MPt.II. 6.5 alapján)

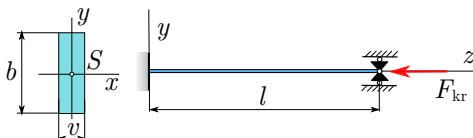
$$d = 40 \text{ [mm]}, l = 1 \text{ [m]}, E = 200 \text{ [GPa]}, \sigma_F = 300 \text{ [MPa]}, \sigma_E = 200 \text{ [MPa]}, n = 2,5$$

- (a) Mekkora lehet a maximális sajtolóerő, ha a kihajlásra előírt biztonsági tényező n ?

Megoldás: $N = 125,5 \text{ [kN]}$

- 77 A v vastagságú b szélességű téglalap KM-ű prizmatikus rúdnak feltételezett fűrészlap nyomott szakaszát egyik végén merev, másik végén csuklós megfogásnak tekintjük. A rúd anyagának folyáshatára σ_F , rugalmassági határa σ_E .

(MPt.II. 6.8 alapján)



$$v = 1,5 \text{ [mm]}, b = 30 \text{ [mm]}, l = 300 \text{ [mm]}, E = 200 \text{ [GPa]}, \sigma_F = 350 \text{ [MPa]}, \sigma_E = 200 \text{ [MPa]}$$

- (a) Mekkora F_{kr} kritikus erőnél következik be a fűrészlap kihajlása?

Megoldás: $F_{kr} = 377,6 \text{ [N]}$.